ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра алгебры и геометрии

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для студентов I курса механико-математического факультета

Издательство "Самарский университет"
1994

Сборник содержит задачи по разделам: векторная алгебра, прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве, кривые второго порядка, поверхности второго порядка, аффинные преобразования, движения, выпуклые множества и многогранники, элементы проективной геометрии.

Набор задач соответствует программе и учебному плану по аналитической геометрии и предназначен для студентов первого курса механико-математического факультета.

Рекомендуем задачи с нечетными номерами решать на практических занятиях, а задачи с четными номерами использовать для домашних заданий.

Составитель доц. В.Н.Кокарев

Рецензент доц. каф. высшей математики СГАУ, канд. физ.-мат. наук О.Ф.Меньших

СЕМЕСТР I

ЗАНЯТИЕ I. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

1. В треугольнике ABC точка O является точкой пересечения медиан AD и BK. Выразить векторы $\overline{AD}$, $\overline{AO}$, $\overline{BK}$ через векторы $\overline{AB}=\bar{a}$ и $\overline{AC}=\bar{b}$.

2. В трапеции ABCD отношение основания AD к основанию BC равно λ. Полагая $\overline{AC}=\bar{a}$, $\overline{BD}=\bar{b}$, выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$.

3. В треугольнике ABC точки K и L делят сторону AB на равные части AK=KL=LB. Точка M лежит на CK так, что $CM=\frac{1}{3}CK$, а точка N лежит на CL так, что $CN=\frac{2}{3}CL$. Выразить вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{AB}=\bar{a}$ и $\overline{AC}=\bar{b}$.

4. Дан правильный шестиугольник ABCDEF. Принимая за базисные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}, \overline{AD}, \overline{AE}$.

5. В параллелограмме ABCD на стороне DC лежит точка K так, что $DK=\frac{1}{4}DC$, на стороне AB лежит точка L так, что $LB=\frac{1}{4}AB$, M – середина KL. Выразить вектор $\overline{MB}$ через векторы $\overline{AB}=\bar{a}$ и $\overline{AD}=\bar{b}$.

6. На стороне AD параллелограмма ABCD отложен отрезок $AK=\frac{1}{5}AD$, на диагонали AC отрезок $AL=\frac{1}{6}AC$. Доказать, что векторы $\overline{KL}$ и $\overline{LB}$ коллинеарны.

7. В тетраэдре ABCD точка M – середина медианы DK треугольника ABD, а точка N является пересечением медиан в треугольнике BDC. Выразить вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$, $\overline{AD}=\bar{c}$.

8. Дан тетраэдр OABC. Принимая за базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ векторы $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$, найти в этом базисе координаты:

1) вектора $\overline{OM}$, соединяющего вершину O с точкой пересечения M медиан грани ABC,

2) вектора, соединяющего середину D ребра OA с точкой F пересечения медиан грани BOC.

9. Дан параллелепипед ABCDA'B'C'D'. Точка L – центр грани A'B'C'D', M – середина BL. Найти координаты вектора $\overline{MB'}$ относительно базиса $\overline{AB}=\bar{e}_1, \overline{AD}=\bar{e}_2, \overline{AA'}=\bar{e}_3$.

10. В параллелепипеде ABCDA'B'C'D' точка M – середина отрезка PK, соединяющего центры граней CBB'C' и ABB'A', а точка N – середина ребра A'D'. Найти координаты вектора $\overline{MN}$ в базисе $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AA'}$.

11. Из точки O выходят два вектора $\overline{OA}=\bar{a}$ и $\overline{OB}=\bar{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overline{OM}$ параллельный биссектрисе угла AOB.

12. В треугольнике ABC точка M является пересечением прямых CK и BL. При этом $\overline{AK}=\frac{2}{3}\,\overline{AB}$, $\overline{AL}=\frac{2}{3}\,\overline{AC}$. Найти координаты вектора $\overline{AM}$ в базисе $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

13. Доказать, что в тетраэдре ABCD прямые, соединяющие вершины с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке O. Выразить вектор $\overline{AO}$ через векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

ЗАНЯТИЕ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ВЕКТОРА, УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ, ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ

1. В треугольнике ABC: $\hat{A}=60^\circ$, $|AB|=2$, $|AC|=3$. Найти угол DOK между биссектрисой AD и медианой CK.

2. В параллелограмме ABCD: $|AB|=4$, $|AD|=2$, $\hat{A}=60^\circ$, точка K – середина стороны BC, прямые BD и AK пересекаются в точке M. Найти угол AMB.

3. В тетраэдре ABCD: $|AB|=2$, $|AC|=3$, $|AD|=4$, $\cos B\hat{A}C=\frac{1}{2}$, $\cos B\hat{A}D=\frac{1}{4}$, $\cos C\hat{A}D=\frac{1}{3}$. Найти угол между биссектрисой угла A в треугольнике ABD и медианой угла C треугольника ACD.

4. В параллелепипеде ABCDA'B'C'D': $|AB|=2$, $|AD|=4$, $|AA'|=6$, $\cos B\hat{A}D=\cos B\hat{A}A'=\frac{1}{3}$, $\cos D\hat{A}A'=\frac{1}{2}$, точка K – середина ребра BB', точка L – середина ребра BC. Найти
I) расстояние между серединами отрезков AK и LA',
2) угол между прямыми AK и LB'.

5. В параллелепипеде ABCDA'B'C'D': $|AB|=2$, $|AA'|=3$, $|AD|=4$, $\cos D\hat{A}B=\frac{1}{4}$, $\cos D\hat{A}A'=\frac{1}{2}$, $\cos B\hat{A}A'=\frac{1}{4}$. Точка K – середина ребра B'C', K' – ортогональная проекция точки K на прямую AA'. Найти расстояние $|AK'|$.

6. Вычислить длины диагоналей AC' и BD' параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, зная длины ребер $|AB|=a$, $|AD|=b$, $|AA'|=c$ и углы $\hat{BAD}=\alpha$, $\hat{BAA'}=\beta$, $\hat{DAA'}=\gamma$. Найти также косинусы углов, образуемых диагональю AC' с ребрами AB, AD, AA'.

7. Определить длину вектора $\bar{a}=\{7,-8\}$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

8. Длины базисных векторов $|\bar{e}_1|=2$, $|\bar{e}_2|=\sqrt{3}$, угол между ними $\omega=\frac{5}{6}\pi$. Даны два вектора $\bar{a}=\{1,2\}$, $\bar{b}=\{2,2\}$. Найти метрические коэффициенты и угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

9. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\{-14,2,5\}$ на прямую, параллельную вектору $\{2,-2,1\}$. Базис ортонормированный.

10. Даны три вектора $\bar{a}=\{8,4,1\}$, $\bar{b}=\{2,-2,1\}$, $\bar{c}=\{1,1,9\}$, исходящие из одной точки. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\bar{c}$ на плоскость, определяемую векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Базис ортонормированный.

11. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\{8,4,1\}$ на плоскость, перпендикулярную к вектору $\{2,-2,1\}$. Базис ортонормированный.

ЗАНЯТИЕ 3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. ОРИЕНТАЦИИ ТРОЕК ВЕКТОРОВ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ

Здесь базисы всюду ортонормированные, положительно ориентированные.

1. Даны два вектора $\bar{a}=\{11,10,2\}$, $\bar{b}=\{4,0,3\}$. Найти вектор $\bar{c}$ длины 1, перпендикулярный к векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ имела положительную ориентацию.

2. Даны два вектора $\bar{a}=\{8,4,1\}$, $\bar{b}=\{2,-2,1\}$. Найти вектор $\bar{c}$ длины 2, перпендикулярный к векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ имела [illegible] ориентацию.

3. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках A(-I,0,-I), B(0,2,-3), C(4,4,I).

4. Даны точки M(I,-I,4), P(2,0,3), Q(5,2,I). Найти расстояние от точки M до прямой PQ.

5. Одна из вершин параллелепипеда ABCDA'B'C'D' находится в точке A(I,2,3), а концы выходящих из нее ребер в точках B(9,6,4), D(3,0,4), A'(5,2,6). Найти угол между диагональю AC' и плоскостью грани ABCD.

6. В тетраэдре ABCD найти угол между ребром AD и плоскостью ABC, если A(-I,2,-2), B(3,0,I), C(2,2,4), D(I,3,2).

7. В тетраэдре ABCD с вершинами A(4,2,I), B(-2,I,0), C(5,3,I), D(2,2,3) найти:
I) расстояние от точки D до прямой AB,
2) угол между плоскостями ABD и ABC.

8. В параллелепипеде ABCDA'B'C'D' найти угол между плоскостями ACC'A' и BCD'A', если $\overline{AB}=\{1,3,-1\}$, $\overline{AD}=\{2,4,1\}$, $\overline{AA'}=\{3,2,1\}$.

9. Доказать тождество

$$([\bar{a},\bar{b}],[\bar{c},\bar{d}])=\begin{vmatrix}(\bar{a},\bar{c}) & (\bar{a},\bar{d})\\ (\bar{b},\bar{c}) & (\bar{b},\bar{d})\end{vmatrix}.$$

10. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равна

$$S=\begin{vmatrix}(\bar{a},\bar{a}) & (\bar{a},\bar{b})\\ (\bar{b},\bar{a}) & (\bar{b},\bar{b})\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

11. Даны плоские углы $\hat{BOC}=a$, $\hat{COA}=b$, $\hat{AOB}=c$ трехгранного угла OABC. Вычислить косинусы его внутренних двугранных углов A,B,C, противолежащих граням BOC,COA, AOB, соответственно.

12. Даны внутренние двугранные углы A,B,C трехгранного угла OABC. Вычислить косинусы его плоских углов.

ЗАНЯТИЕ 4. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Во всех задачах этого занятия базисы ортонормированные, положительно ориентированные, если не оговорено иначе.

1. Даны точки A(4,2,I), B(0,0,I), C(2,-2,I), D(3,-I,2). A_1- ортогональная проекция точки A на плоскость BCD. Найти:
I) расстояние от точки A до плоскости BCD,
2) координаты вектора $\overline{A_1A}$.

2. Вычислить объем параллелепипеда ABCDA'B'C'D', зная его вершину A(I,2,3) и концы выходящих из нее ребер B(9,6,4), D(3,0,4), A_1(5,2,6).

3. Даны три луча OA,OB,OC, не лежащие в одной плоскости. Внутри углов AOB, BOC, COA взяты, соответственно, точки D,E,F. Установить, будут ли упорядоченные тройки векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ иметь одинаковые или противоположные ориентации.

4. Даны три некомпланарных вектора $\overline{OA}=\bar a$, $\overline{OB}=\bar b$, $\overline{OC}=\bar c$. Найти вектор $\overline{OH}$, где H- ортогональная проекция точки O на плоскость ABC.

5. Доказать тождество

$$(\bar a,\bar b,\bar c)(\bar x,\bar y,\bar z)=\begin{vmatrix}(\bar a,\bar x) & (\bar a,\bar y) & (\bar a,\bar z)\\ (\bar b,\bar x) & (\bar b,\bar y) & (\bar b,\bar z)\\ (\bar c,\bar x) & (\bar c,\bar y) & (\bar c,\bar z)\end{vmatrix}.$$

6. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен

$$V=\begin{vmatrix} (\bar{a},\bar{a}) & (\bar{a},\bar{b}) & (\bar{a},\bar{c}) \\ (\bar{b},\bar{a}) & (\bar{b},\bar{b}) & (\bar{b},\bar{c}) \\ (\bar{c},\bar{a}) & (\bar{c},\bar{b}) & (\bar{c},\bar{c}) \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

7. Найти расстояние между прямыми AB и CD, где $A(2,-4,0)$, $B(0,-3,I)$, $C(I,I,I)$, $D(-I,-3,I)$.

8. Вычислить объем параллелепипеда, зная длины $|OA|=a$, $|OB|=b$, $|OC|=c$ трех его ребер, выходящих из одной вершины O, и углы $B\hat{O}C=\alpha$, $C\hat{O}A=\beta$, $A\hat{O}B=\gamma$ между ними.

9. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $\bar{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\bar{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, $\bar{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$ и смешанное произведение векторов $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$, если известны метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ – вообще говоря не ортонормированного.

10. Даны два вектора $\bar{a}=\{0,I,I\}$ и $\bar{b}=\{I,I,0\}$. Найти вектор $\bar{c}$ длины I, перпендикулярный к вектору $\bar{a}$, образующий с вектором $\bar{b}$ угол $\frac{\pi}{4}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ имела положительную ориентацию.

ЗАНЯТИЕ 5. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. АФФИННАЯ, ПРЯМОУГОЛЬНАЯ И ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АФФИННЫХ КООРДИНАТ

1. Дан правильный шестиугольник ABCDEF. Принимая за начало аффинной системы координат вершину A, а за базис – векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, найти в этой системе координаты вершин шестиугольника.

2. Дан правильный шестиугольник ABCDEF. Принимая за начало аффинной системы координат вершину A, а за базис – векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AF}$, найти в этой системе координаты вершин шестиугольника.

3. Вершина O тетраэдра OABC принята за начало координат, а векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ за базисные векторы. Найти в этой системе координаты точек пересечения медиан граней тетраэдра.

4. Начало аффинной системы координат O находится в центре параллелепипеда ABCDA'B'C'D', а базисными векторами являются $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA'}$. Найти в этой системе координаты вершин, центров граней и середин ребер.

5. Даны две точки A(-3,I) и B(2,-3). На прямой AB найти точку M так, чтобы она была расположена по ту же сторону от точки A, что и точка B, и чтобы отрезок AM был втрое больше отрезка AB. Система координат аффинная.

6. Даны четыре точки A(-3,5,I5), B(0,0,7), C(2,-I,4), D(4,-3,0). Установить, пересекаются ли прямые AB и CD, и если пересекаются, то найти точку их пересечения. Система координат аффинная.

7. Доказать, что четырехугольник ABCD с вершинами A(I,2), B(-3,I), C(-I,-5), D(3,-1) выпуклый. Система координат аффинная.

8. Проверить, что четырехугольник ABCD с вершинами A(4,4), B(5,7), C(IO,IO), D(I2,4) является выпуклым, и найти центр тяжести четырехугольной однородной пластинки с вершинами в точках A,B,C,D. Система координат аффинная.

9. В треугольнике OAB проведены медианы AD и BE, пересекающиеся в точке O'. Выразить координаты x и y произвольной точки относительно системы координат с началом в точке O и базисными векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ через ее координаты x', y' в системе с началом O' и базисными векторами $\overline{O'A'}$ и $\overline{O'B'}$.

10. Даны две системы координат Oxyz и O'x'y'z'. По отношению к первой системе начало второй находится в точке O'(I,2,3), а базисные векторы второй системы суть $\bar{e}_1' = (2,4,I)$, $\bar{e}_2' = (0,4,4)$, $\bar{e}_3' = (I,I,0)$.

I) Записать выражения координат точек относительно первой системы через их координаты во второй системе.

2) Выразить координаты точек относительно второй системы через их координаты в первой системе.

3) Найти координаты начала O и координаты базисных векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ первой системы относительно второй.

II. Дан правильный шестиугольник ABCDEF. Приняв за полярную ось луч [AB), за положительное направление отсчета углов направление кратчайшего поворота от $\overline{AB}$ к $\overline{AC}$, за единичный отрезок – отрезок AB, определить в этой системе полярные координаты вершин шестиугольника.

I2. Зная прямоугольные координаты точек A(-I,I), B(0,2), C(5,0), D(-8,-6), найти их координаты в полярной системе координат, соответствующей данной прямоугольной.

ЗАНЯТИЕ 6. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА. ВЕКТОРЫ. ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ

I. ABCD – параллелограмм, $|AD|=3$, $|AB|=2$, $\widehat{BAD}=60^\circ$, $\overline{AK}=\overline{LC}=\frac{1}{3}\overline{AD}$, O – точка пересечения AC и KL, M – середина OC. Найти величину угла $\widehat{OLM}$.

2. В тетраэдре ABCD, $|AB|=1$, $|AC|=2$, $|AD|=3$, $\cos\widehat{BAC}=\frac{1}{2}$, $\cos\widehat{BAD}=\frac{1}{3}$, $\cos\widehat{CAD}=\frac{1}{6}$, M – точка пересечения медиан треугольника BCD, B_1 и D_1 – ортогональные проекции точек B и D на прямую AM. Найти расстояние $|B_1D_1|$.

3. В параллелепипеде ABCDA'B'C'D' координаты вершин A(I,0,I), B(3,2,2), D(-2,2,4), A'(4,0,5). Найти угол между плоскостями ACC'A' и ABC'D'. Система координат прямоугольная.

ЗАНЯТИЕ 7. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

I. Написать уравнение прямой,

I) проходящей через точку (3,-5) параллельно вектору (-4,2),

2) проходящей через точку (3,-2) параллельно оси OY,

3) проходящей через точку (2,3) и имеющей угловой коэффициент, равный -5,

4) имеющей угловой коэффициент 3 и отсекающей на оси OY отрезок, равный 4,

5) проходящей через две точки (2,3) и (-4,-6),

6) отсекающей на осях OX и OY отрезки, соответственно равные 3 и -5

Система координат аффинная.

2. Дан треугольник ABC: A(-2,3), B(4,1), C(6,-5). Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A. Система координат аффинная.

3. Найти угловой коэффициент и отрезки, отсекаемые на осях OX и OY прямыми

1) $x + 2y + 1$ [illegible],

2) $(x - y - 1$ [illegible] и x [illegible] $= 0$,

3) $ax + by$ [illegible].

4. Дан треугольник ABC: A(4,4), B(-6,-1), C(-2,-4). Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине C. Система координат прямоугольная.

5. Даны уравнения двух сторон треугольника $2x - y = 0$, [illegible]$x - y = 0$ и уравнение $3x - y = 0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка (3,9). Система координат аффинная.

6. Даны уравнения $3x - 2y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $2x - y - 1 = 0$ медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника. Система координат аффинная.

7. Даны уравнения двух сторон треугольника $x - 3y + 5 = 0$, $5x - 3y + 1 = 0$ и медианы $2x - 3y + 4 = 0$. Найти уравнение третьей стороны, зная вершину (10,5) на первой стороне. Система координат аффинная.

8. Дано уравнение x [illegible] $y + 7 = 0$ стороны треугольника и уравнения [illegible] $= 0$, [illegible] $= 0$ медиан, выходящих из вершин треугольника, лежащих на данной стороне. Составить уравнения двух других сторон треугольника. Система координат аффинная.

9. Через точку M(4,-3) провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат, [illegible]

равна 3. Система координат прямоугольная.

10. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 5y = 0$ и образующей вместе с осями координат треугольник, площадь которого равна 5. Система координат прямоугольная.

ЗАНЯТИЕ 8. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ И ТРЕХ ПРЯМЫХ. ПУЧОК ПРЯМЫХ. РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ

Во всех задачах этого занятия система координат аффинная.

1. Определить взаимное расположение пар прямых:

1) $2x + 3y - 1 = 0$ и $4x + 6y - 7 = 0$,

2) $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -2 - 2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$,

3) $3x + 9y + 5 = 0$ и $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \end{cases}$

2. Определить взаимное расположение прямых $x + y + 1 = 0$ и $(1+2p)x + (1-p)y + (1+2p) = 0$.

3. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - y - 1 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,-1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

4. Составить уравнения сторон параллелограмма ABCD зная, что его диагонали пересекаются в точке $M(1,6)$, а стороны AB, BC, CD и DA проходят, соответственно, через точки $P(3,0)$, $Q(6,6)$, $R(5,9)$, $S(-5,4)$.

5. Определить взаимное расположение трех прямых в каждом из следующих случаев:

1) $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $x - y + 7 = 0$;

2) $2x + 5y - 4 = 0$, $7x + y - 20 = 0$, $3x + 2y - 8 = 0$;

3) $x - y - 2 = 0$, $3x + 5y + 4 = 0$, $6x - 6y + 1 = 0$;

4) $2x + 3y - 1 = 0$, $4x + 6y + 5 = 0$, $10x + 15y - 6 = 0$.

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точки пересечения прямых m,n и p,q , где

$$m:\ 4x + y - 1 = 0,$$
$$n:\ x + y + 2 = 0,$$
$$p:\ 5x - y - 1 = 0,$$
$$q:\ x - y + 2 = 0.$$

7. Стороны треугольника заданы уравнениями AB: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, BC: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, AC: $A_3x + B_3y + C_3 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно AC.

8. Найти уравнение прямой, проходящей через точки пересечения прямых m_1, m_2 и m_3, m_4, где $m_i:\ A_ix + B_iy + C_i = 0$, $i=1,2,3,4$.

9. Даны две прямые $2x + 3y - 5 = 0$, $x - y - 1 = 0$ и пять точек P(3,1), Q(2,2), R(-2,1), S(1,-1), T(4,0). Обозначая через AMB тот из четырех углов, образованных данными прямыми, в котором лежит точка P, а через CMD – угол, ему вертикальный, установить, в каких углах лежат остальные 4 точки.

10. Две параллельные прямые $2x - 5y + 6 = 0$ и $2x - 5y - 7 = 0$ делят плоскость на три области. Установить, каким областям принадлежат точки A(2,1), B(3,2), C(1,1), D(2,8), E(7,1), F(-4,6).

ЗАНЯТИЕ 9. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Во всех задачах этого занятия система координат является прямоугольной.

1. Даны вершины треугольника A(4,6), B(-4,0), C(-1,-4). Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

2. Даны две вершины треугольника A(-6,2), B(2,-2) и точка H(1,2) пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C.

3. Найти проекцию точки (-5,6) на прямую $7x - 13y - 105 = 0$.

4. Даны две стороны треугольника $x + 3y - 1 = 0$, $3x + 5y - 6 = 0$ и точка пересечения его высот (0,0). Найти третью сторону треугольника.

5. Найти точку, симметричную точке $M(-2,9)$ относительно прямой $2x - 3y + 18 = 0$.

6. Написать уравнения сторон равнобедренной трапеции, зная середины ее оснований $(1,1)$, $(2,8)$ и точки $(4,-3)$, $(-15,14)$ на ее боковых сторонах.

7. Основанием равнобедренного треугольника является прямая $2x + 3y = 0$, его вершина находится в точке $(2,6)$, тангенс угла при основании равен $\frac{3}{2}$. Найти уравнения боковых сторон треугольника.

8. Основанием равнобедренного треугольника является прямая $2x - 5y + 1 = 0$, а боковой стороной прямая $12x - y - 23 = 0$. Найти уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что она проходит через точку $(3,1)$.

9. Найти косинус того угла между прямыми $x + 5y = 0$ и $10x + 2y + 1 = 0$, в котором лежит точка $(1,1)$.

10. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x + 3y = 0$, а боковой стороной - прямая $5x - 12y = 0$. Найти уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что она проходит через точку $(2,6)$.

ЗАНЯТИЕ 10. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Во всех задачах этого занятия система координат прямоугольная.

1. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$Ax + By + C_1 = 0 \text{ и } Ax + By + C_2 = 0,$$
$$12x - 16y - 48 = 0 \text{ и } 3x - 4y + 43 = 0.$$

2. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $5x + 12y - 1 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии 5.

3. Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $x + 2y = 0$ и $2x - 11y + 30 = 0$.

4. Написать уравнения касательных к окружности с центром $(1,1)$ и радиусом 2, проведенных из точки $(7,-1)$.

5. Найти уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x + 7y = 0$ и $x - y - 4 = 0$, внутри которого лежит точка $(1,1)$.

6. Составить уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x - 4y = 0$, $4x - 3y = 0$ и $5x + 12y - 10 = 0$.

7. Составить уравнения сторон квадрата, зная по точке на каждой из них: $P(2,1)$, $Q(0,1)$, $R(3,5)$, $S(-3,-1)$ на сторонах AB, BC, CD, DA, соответственно.

8. Составить уравнения сторон квадрата, зная его центр $(1,6)$ и по точке на двух непараллельных сторонах: $(4,9)$ на стороне AB, $(-5,4)$ - на BC.

9. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точку $(-1,3)$ и касающейся прямых $7x + y = 0$ и $x - y + 8 = 0$.

ЗАНЯТИЕ 11. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Во всех задачах этого занятия система координат аффинная, кроме задачи 5.

1. Составить параметрические уравнения и общее уравнение плоскости, проходящей через точку $(2,3,-5)$ и параллельной векторам $\{-5,6,4\}$ и $\{2,-1,0\}$.

2. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям

$$\begin{cases} x = 2 + 3u - 4v \\ y = 4 - v \\ z = 2 + 3u \end{cases}.$$

3. В плоскости, проходящей через три точки $A(2,1,3)$, $B(2,4,0)$, $C(-1,0,4)$, выбрана аффинная система координат с началом в точке A и базисными векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Найти:

1) пространственные координаты точки M, имеющей в плоскостной системе координаты $u = 5$, $v = 3$,

2) плоскостные координаты u, v точки пересечения данной плоскости с осью Oz.

4. В плоскости $2x + 3y - 4z + 12 = 0$ выбрана аффинная система координат, начало которой находится в точке C пересечения этой плоскости с осью OZ, а концы базисных векторов соответственно в точках A и B пересечения плоскости с осями OX и OY.

1) Найти пространственные координаты x, y, z точки E этой плоскости, плоскостные координаты которой $u = 1$, $v = 1$.

2) Написать в плоскостной системе координат уравнения прямых AB, BC и CA.

3) Написать в плоскостной системе координат уравнение прямой, являющейся пересечением данной плоскости с плоскостью $5x + 3z - 8 = 0$.

5. Доказать, что прямые $x = 1 + 2t$, $y = 2t$, $z = t$ и $x = 11 + 8t$, $y = 6 + 4t$, $z = 2 + t$ пересекаются, и написать уравнение биссектрисы тупого угла между ними. Система координат прямоугольная.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-2,3,0)$ и через прямую $x = 1$, $y = 2 + t$, $z = 2 - t$.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1,2,3)$ и пересекающей прямые $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ и $\frac{x}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{3}$.

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(3,-1,-4)$, пересекающей прямую $x = 5 + 3t$, $y = 2 + t$, $z = -3 + 2t$ и параллельной плоскости $y + 2z = 0$.

9. Написать параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

10. Доказать, что шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра ABCD и через середину противоположного ему ребра, пересекаются в одной точке.

ЗАНЯТИЕ I2. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ

Во всех задачах этого занятия система координат аффинная.

I. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

I) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ и $3x - 6y + 1 = 0$,

2) $2x - y - z - 3 = 0$ и $10x - 5y - 5z - 15 = 0$,

3) $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 4u \\ y = 3u + v \\ z = 4 + 2u + 2v \end{cases}$.

2. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

I) $3x - 2y - 3z + 5 = 0$ и $9x - 6y - 9z - 5 = 0$,

2) $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = 2 - 2u + 4v \\ z = 1 + u + 3v \end{cases}$,

3) $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -1 + 2u + v \\ y = u + 2v \\ z = 1 + 3v \end{cases}$.

3. Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, пересекаются или совпадают:

I) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$,

2) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$,

3) $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \\ 3x + 4y + 7z = 0 \end{cases}$

4. Установить, как расположены друг относительно друга прямая и плоскость

1) $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и $3x + 5y - z - 2 = 0$,

2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{1}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$,

3) $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (-3,1,0) и через прямую

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 3x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей $2x - z = 0$, $x + y - z + 5 = 0$ и параллельной прямой $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ параллельно плоскости $x - 3y + 2z = 0$.

8. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (2,3,1) и пересекающей прямые

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

9. Даны две плоскости $2x + z = 0$, $x + y + 3z - 5 = 0$ и точки A(2,1,1), B(1,0,3), C(0,0,1), D(-1,5,1), E(1,4,-3). Установить, какие из точек B, C, D, E лежат в одном двугранном угле с точкой A, какие в смежных с ним углах и какие в угле, к нему вертикальном.

10. Даны две параллельные плоскости $3x + 4y + 2z - 10 = 0$, $3x + 4y + 2z + 5 = 0$ и точки A(1,1,1), B(2,0,0), C(5,6,1), D(-4,0,1). Определить положение данных точек относительно данных плоскостей.

ЗАНЯТИЕ 13. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. УГЛЫ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ И ПЛОСКОСТЯМИ

Во всех задачах этого занятия система координат прямоугольная

1. Найти ортогональную проекцию точки (1,2,-3) на плоскость $6x - y + 3z - 41 = 0$.

2. Найти точку, симметричную точке (1,2,3) относительно плоскости $2x - 3y + 5z - 68 = 0$.

3. Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки (…,6,4) на прямую $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{3}$.

4. Найти точку, симметричную точке (1,2,3) относительно прямой $\frac{x-8}{1} = \frac{y-11}{3} = \frac{z-4}{-1}$.

5. Найти уравнения общего перпендикуляра к двум прямым $\frac{…-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

6. Найти ортогональную проекцию точки (1,3,5) на прямую

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

7. Через линию пересечения плоскостей $x + 5y + z = 0$ и $… - z + 4 = 0$ провести плоскость, образующую угол 45° с плоскостью $… - 4y - 8z + 12 = 0$.

8. Найти косинус угла между прямыми

$$\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x+7}{-2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z}{1}$$

и образующей угол 60° с прямой

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y+2z=0. \end{cases}$$

10. Найти угол между прямой

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$$ и плоскостью $3x+5y-4z+2=0$.

ЗАНЯТИЕ 14. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ, РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ, РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Во всех задачах этого занятия система координат прямоугольная.

1. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $3x+5y-4z+1=0$ и $x-z-5=0$, в котором лежит начало координат.

2. Составить уравнения биссекторных плоскостей двугранных углов между двумя плоскостями $7x-y-6=0$ и $3x+5y-4z+1=0$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $3x+2y-z+6=0$ и $x-3z+4=0$ и касающейся сферы с центром $(1,1,1)$ радиуса 2.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{1}$ и касающейся сферы $x^2+y^2+z^2=4$.

5. Найти расстояние от точки (I,2,5) до прямой

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

6. Найти расстояние от точки (I,3,5) до прямой

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

7. Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3t \end{cases}$$

8. Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y + z - 9 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

9. Найти расстояние между прямыми

$$\frac{x - 2}{\text{[illegible]}} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x - 7}{3} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 3}{2}$$

10. Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases} 4x + y + 3z + 7 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

ЗАНЯТИЕ 15. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Примерный вариант.

1. Дана диагональ ромба AC: $x - 3y + 1 = 0$, сторона AD: $7x - y - 13 = 0$ и точка $M(6,5)$ на стороне CD. Найти координаты всех вершин ромба. Система координат прямоугольная.

2. Найти прямую, симметричную прямой

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{относительно прямой} \quad \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}.$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad \text{и образующей с плоскостью} \quad 5x - 2y + z = 0$$

угол α такой, что $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

ЗАНЯТИЕ 16. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ, ПАРАБОЛЫ

Во всех задачах этого занятия система координат прямоугольная.

1. Составить уравнение линии второго порядка, оси которой совпадают с осями координат, зная, что она проходит через точки $(2,2)$, $(3,1)$.

2. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(1,2)$, асимптотами которой служат прямые

$$y = \pm\frac{1}{2}x.$$

3. Найти уравнение эллипса, описанного около равностороннего треугольника, две вершины которого находятся в точках $(a,0)$, $(-a,0)$ и совпадают с вершинами эллипса, принадлежащими одной оси.

4. Доказать, что длина отрезка, соединяющего центр эллипса с произвольной его точкой, заключена между длинами полуосей этого эллипса.

5. Найти наибольший радиус круга, лежащего внутри параболы $y^2 = 2px$ и касающегося параболы в ее вершине.

6. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до двух ее асимптот одно и то же для всех точек данной гиперболы.

7. Написать уравнение эллипса, для которого прямые $x + y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$ суть соответственно большая и малая оси, а длины полуосей которого $a = 2$, $b = 1$.

8. Написать уравнение параболы, осью которой служит прямая $x + y + 1 = 0$ и которая проходит через точки $(0,0)$ и $(0,1)$.

9. Найти фокусы и соответствующие им директрисы следующих линий:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1 , \qquad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 .$$

Вычислить эксцентриситеты.

10. Найти фокусы и соответствующие им директрисы следующих линий:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 , \qquad -\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{8} = 1 ,$$

$$y^2 = 6x , \qquad x^2 = \frac{4}{3} y .$$

Вычислить эксцентриситеты.

11. Пусть две гиперболы имеют общие асимптоты. Доказать, что если эти гиперболы лежат в одной и той же паре вертикальных углов, образованных их асимптотами , то их эксцентриситеты равны между собой.

ЗАНЯТИЕ 17. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА С ОСЯМИ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КООРДИНАТНЫМ ОСЯМ. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Во всех задачах здесь система координат прямоугольная.

Построить следующие кривые и найти координаты фокусов, уравнения директрис и асимптот, если они существуют.

1. $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$,

2. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$,

3. $3x^2 + 12x + 16y - 12 = 0$,

4. $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0$.

5. Найти уравнение параболы, у которой фокус находится в точке $F(2,2)$, а директриса имеет уравнение $x - 3y + 2 = 0$.

6. Найти уравнение эллипса, у которого фокус находится в точке $(3,5)$, соответствующая директриса имеет уравнение $3x + 2y - 6 = 0$, зная, что этот эллипс проходит через точку $(4,\frac{7}{2})$.

7. Определить тип линии

$$x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0$$

при изменении параметра λ от $-\infty$ до $+\infty$ и найти ее расположение относительно данной системы координат.

ЗАНЯТИЕ 18. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ, ПАРАБОЛЫ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

1. Составить уравнение гиперболы в полярных координатах, если дано ее каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1 .$$

2. Составить уравнение эллипса в полярных координатах, зная его полуоси $a = 2\sqrt{5}$, $b = 4$.

3. Составить уравнение параболы $y^2 = 8x$ в полярных координатах.

4. Составить уравнение гиперболы с полуосями a, b в полярных координатах, поместив полюс в фокус и направив полярную ось к центру кривой.

5. Найти каноническое уравнение кривой, имеющей в полярных координатах уравнение

$$\rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}.$$

6. Найти каноническое уравнение кривой, имеющей в полярных координатах уравнение

$$\rho = \frac{6}{1 - \cos\varphi}.$$

7. Найти каноническое уравнение кривой, имеющей в полярных координатах уравнение

$$\rho = \frac{4}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}.$$

8. Определить вид кривой, заданной полярным уравнением

$$\rho = 2p\,\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

СЕМЕСТР 2

ЗАНЯТИЕ I. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЦЕНТР, ДИАМЕТР, КАСАТЕЛЬНЫЕ, АСИМПТОТЫ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫХ ОБЩИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Во всех задачах этого занятия, где система координат задана, она является аффинной.

I. Найти сопряженные диаметры кривой

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0,$$

один из которых параллелен оси OY.

2. В кривую $x^2 + 4xy + 2x + 4y + 1 = 0$ вписан параллелограмм, одной из сторон которого является прямая $y = x$. Найти вершины этого параллелограмма.

3. Даны две кривые второго порядка

$$3x^2 + 6xy - y^2 - 18x - 10y = 0,$$

$$9x^2 + 6xy + y^2 - 18x - 10y = 0.$$

Найти общий диаметр этих двух кривых и направления тех хорд каждой из данных линий, которым сопряжен этот диаметр.

4. Найти диаметры, сопряженные одновременно относительно двух кривых

$$x^2 + 2xy - y^2 = 1 \quad \text{и}$$

$$x^2 - 10xy + 4y^2 = 1.$$

5. Составить уравнения касательных к кривой

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1,$$

проведенных из точки (I2,-3).

6. Написать уравнения касательных к кривой

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \ ,$$

параллельных прямой $x + y - 1 = 0$.

7. Найти асимптоты гиперболы

$$2x^2 + 6xy - 12x - 18y + 5 = 0.$$

8. Найти асимптоты гиперболы

$$3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0.$$

9. Найти сопряженные диаметры эллипса, угол между которыми минимален.

10. Написать уравнение эллипса, зная его центр $C(2,1)$ и концы двух сопряженных диаметров $A(5,1)$, $B(0,3)$.

ЗАНЯТИЕ 2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ТИП И РАСПОЛОЖЕНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Во всех задачах занятий 2,3,4,5,6 система координат прямоугольная.

Используя инварианты, построить кривые

1. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$

2. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$

3. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$

4. $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0.$

ЗАНЯТИЕ 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ТИП И РАСПОЛОЖЕНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Используя инварианты, построить кривые.

1. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0.$

2. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$

3. $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0.$

4. $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 2 = 0.$

5. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0.$

6. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8x + 12y + 4 = 0.$

ЗАНЯТИЕ 4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЦИЛИНДРЫ И КОНУСЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

1. Написать уравнение круглого цилиндра, проходящего через точку $(1,-2,1)$, осью которого служит прямая

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2} .$$

2. Составить уравнение цилиндра, описанного вокруг сферы $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, зная направляющий вектор $\{a,b,c\}$ образующих цилиндра.

3. Составить уравнение круглого конуса, вершина которого находится в точке $(1,2,3)$, направляющий вектор оси $\{2,2,-1\}$, а угол образующих конуса с его осью равен $\pi/6$.

4. Найти острый угол между образующими конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, по которым его пересекает плоскость $5x + 10y - 11z = 0$.

5. Написать уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(0,0,a)$, а направляющей служит гипербола $2xy = a^2$, $z = 0$.

6. Написать уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(0,0,p)$, а направляющей служит парабола $y^2 = 2px$, $z = 0$.

7. Написать уравнение конуса, проходящего через прямые $y = \pm x$, $z = 0$ и точку $(1,2,3)$, у которого ось OZ является осью симметрии.

8. Написать уравнение круглого конуса, касающегося плоскостей OXZ и OYZ по прямым OX и OY.

9. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении рямой $y = kx + b$, $z = 0$ вокруг оси OX.

10. Написать уравнение тора, полученного вращением окружности $x - a)^2 + z^2 = b^2$, $y = 0$ $(a > b > 0)$ вокруг оси OZ.

ЗАНЯТИЕ 5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЭЛЛИПСОИДЫ, ГИПЕРБОЛОИДЫ, ПАРАБОЛОИДЫ, ЗАДАННЫЕ КАНОНИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

1. Установить, пересекает ли плоскость $2x + 2y + z - 3 = 0$ ллипсоид $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$.

2. По какой линии плоскость $x + y - z + 3 = 0$ пересекает вуполостный гиперболоид $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$?

3. По какой линии пересекаются гиперболический параболоид $\ldots - \frac{y^2}{4} = 2z$ и плоскость $2x + 3y - 6 = 0$?

4. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы лоскость $z = ax + by + c$ пересекала параболоид вращения $\ldots + y^2 = 2pz$ $(p > 0)$ по действительному эллипсу?

5. По какой линии пересекаются поверхности $\ldots + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $(a > b)$ и $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$?

6. По какой линии пересекаются поверхности $\ldots + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, где $a > b$?

7. Написать уравнение параболоида вращения с параметром $p = \frac{1}{3}$

вершиной $(1,0,-1)$ и направляющим вектором оси вращения $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$, направленным в сторону вогнутости.

8. Написать уравнение поверхности второго порядка, проходящей через три окружности

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0,$$
$$x^2 + y^2 = 9, \quad z = 1,$$
$$x^2 + y^2 = 25, \quad z = 2.$$

9. Составить уравнение поверхности второго порядка, зная, что она пересекает плоскость OXY по окружности $x^2 + y^2 - 12x - 18y + 32 = 0$, $z = 0$, а плоскости OXZ и OYZ – по параболам, оси которых параллельны положительному направлению оси OZ, причем параметр параболы, лежащей в плоскости OXZ, равен 1.

10. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точки $(0,0,0)$, $(1,1,-1)$, $(0,0,1)$, для которой плоскости $x + y + z = 0$, $2x - y - z = 0$, $y - z + 1 = 0$ являются плоскостями симметрии.

ЗАНЯТИЕ 6. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПА И РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ

Определить вид и расположение поверхностей.

1. $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$.

2. $3x^2 - y^2 + 3z^2 - 18x + 10y + 12z + 14 = 0$.

3. $z^2 = 3x^2 + 4xy$.

4. $z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 1$.

5. $x^2 + 2x + 3y + 4z + 5 = 0$.

6. $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy + 4z = 0$.

7. Найти угол между прямолинейными образующими однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, проходящими через точку $(1,4,8)$, беря на этих образующих лучи, направленные от данной точки к горловому эллипсу.

8. Найти прямолинейные образующие поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - yz + 4x + 3y - 5z + 4 = 0$, проходящие через точку $(-1,-1,1)$.

ЗАНЯТИЕ 7. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Во всех задачах этого занятия система координат аффинная.

1. Найти аффинное преобразование, переводящее точку $(6,-2)$ в точку $(1,1)$, а векторы $\{2,1\}$ и $\{-1,2\}$ – соответственно в векторы $\{4,2\}$ и $\{-3,6\}$.

2. Найти аффинное преобразование, которое точки $A_1(1,0)$, $A_2(0,2)$, $A_3(-3,0)$ переводит соответственно в точки $A_1'(2,3)$, $A_2'(0,2)$, $A_3'(-2,-1)$.

3. Найти образ прямой $3x + y + 1 = 0$ при аффинном преобразовании
$$\begin{cases} x' = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \\ y' = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + 1 \end{cases}.$$

4. Найти образ кривой $x^2 + y^2 = 1$ при аффинном преобразовании
$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}.$$

5. Найти прообраз прямой $x - 2y + 4 = 0$ при аффинном преобразовании
$$\begin{cases} x' = 3x + y + 1 \\ y' = x - y - 3 \end{cases}.$$

6. Найти прообраз кривой $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ при аффинном преобразовании
$$\begin{cases} x' = -x + 2y - 1 \\ y' = x + 3y \end{cases}.$$

7. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y - 12 \\ y' = 4x - 3y + 6 \end{cases}$$

На прямой $7x - 2y - 24 = 0$ найти такую точку, которая при этом преобразовании переходит в точку, лежащую на данной прямой.

8. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$$

и точка $A(1,1)$. Найти прямую, проходящую через точку A, которая при этом преобразовании переходит в прямую, также проходящую через точку A.

9. Найти неподвижные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = \frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{4}{5} \end{cases} .$$

10. Найти неподвижные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = 7x - y + 1 \\ y' = 4x + 2y + 4 \end{cases} .$$

ЗАНЯТИЕ 8. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Во всех задачах занятий 8 и 9 система координат прямоугольная.

1. Найти направляющие векторы главных направлений аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = 7x + y - 2 \\ y' = -5x + 5y \end{cases} .$$

2. Найти вектор, который аффинным преобразованием

$$\begin{cases} x' = 10x + 11y \\ y' = 10x + 9y \end{cases}$$

преобразуется в вектор, ему ортогональный.

3. Найти координатную запись аффинного преобразования, являющегося сжатием к прямой $2x + y - 2 = 0$ с коэффициентом сжатия $k = 3$.

4. Найти координатную запись аффинного преобразования, являющегося произведением сжатия к прямой $x + y - 1 = 0$ с коэффициентом $k = {}^1/2$ и симметрии относительно этой прямой.

5. Доказать, что преобразование

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + 6 \\ y' = 4x - 3y - 12 \end{cases}$$

является подобием, меняющим ориентацию. Найти коэффициент этого подобия.

6. Доказать, что преобразование

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + 10 \\ y' = 4x + 3y - 10 \end{cases}$$

является преобразованием подобия, сохраняющим ориентацию. Найти коэффициент этого подобия.

7. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = a_1^1 x + a_2^1 y + x_0 \\ y' = a_1^2 x + a_2^2 y + y_0 \end{cases} .$$

Какой геометрический смысл имеют прямые $a_1^1 x + a_2^1 y + x_0 = 0$ и $a_1^2 x + a_2^2 y + y_0 = 0$?

8. Найти площадь параллелограмма, стороны которого имеют уравнения $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + D = 0$,

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_1 x + B_1 y + D_1 = 0 .$$

9. Найти инвариантные плоскости, прямые и неподвижные точки аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = 6x - 2y - 3z \\ y' = -2x + 3y - 6z + 6 \\ z' = -3x - 6y - 2z + 12 \end{cases} .$$

10. Найти инвариантные плоскости, прямые и неподвижные точки аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + 6 \\ y' = 4x + 3y - 8 \\ z' = -2z + 9 \end{cases}$$

ЗАНЯТИЕ 9. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу, проходящих через концы его сопряженных диаметров.

2. Найти геометрическое место середин хорд эллипса, соединяющих концы сопряженных диаметров.

3. Найти площадь области, ограниченной эллипсом с полуосями a и b.

Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом с полуосями a, b, c.

4. Определить геометрическое место середин хорд эллипса, отсекающих от него сегменты постоянной площади.

5. Найти аффинное преобразование, при котором гипербола $x^2 - y^2 = 1$ переходит в ту же гиперболу, причем точка $(1,0)$ переходит в точку $(\sqrt{2}, 1)$.

6. Найти аффинное преобразование, переводящее параболу $y^2 = 2x$ в себя, при котором точки $(2,2)$ и $(\frac{1}{2}, 1)$ переходят соответственно в точки $(8,4)$ и $(\frac{9}{2}, 3)$.

7. Найти все аффинные преобразования, переводящие окружность $x^2 + y^2 = 1$ в себя.

8. Найти все аффинные преобразования, переводящие в себя эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

ЗАНЯТИЕ 10. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Примерный вариант:

1. Построить кривую

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0.$$

2. Найти уравнение конуса с вершиной в точке $S(0,0,2)$ и направляющей $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z - 1 = 0 . \end{cases}$

3. Найти аффинное преобразование, переводящее точки $A(2,1)$, $B(1,0)$, $C(2,3)$ в точки $A'(3,1)$, $B'(2,2)$, $C'(0,1)$. Найти главные направления этого преобразования. Система координат прямоугольная.

ЗАНЯТИЕ 11. ДВИЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Во всех задачах занятий 11, 12, 13, 14 системы координат, используемые в записи данных, являются прямоугольными.

1. Найти движение, сохраняющее ориентацию и переводящее точку $(1,0)$ в точку $(0,0)$, а точку $(0,0)$ в точку $(0,1)$. Найти угол поворота и неподвижную точку этого преобразования.

2. Найти движение, меняющее ориентацию и переводящее точку $(1,0)$ в точку $(0,0)$, а точку $(0,0)$ в точку $(0,1)$. Найти ось симметрии и вектор переноса вдоль оси.

3. Доказать, что преобразование

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 6 \\ y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 12 \end{cases}$$

является скользящей симметрией. Найти ось симметрии и вектор переноса вдоль оси. Записать канонический вид данного преобразования.

4. Доказать, что преобразование

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0 \\ y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

является скользящей симметрией. Найти ось симметрии и вектор переноса.

5. Доказать, что преобразование

$$\begin{cases} x' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - \frac{4}{13} \\ y' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{6}{13} \end{cases}$$

является вращением. Найти центр и угол поворота.

6. Доказать, что преобразование

$$\begin{cases} x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \\ y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \end{cases}$$

является осевой симметрией. Найти ось.

7. Дан правильный шестиугольник ABCDEF. Доказать, что композиция осевых симметрий относительно прямых AB, BC, CD, DE, EF, FA является параллельным переносом. Найти вектор параллельного переноса, выразить его через вектора $\overline{AB}$ и $\overline{AF}$.

8. Дан правильный 2n-угольник. Доказать, что композиция осевых симметрий относительно всех последовательных его сторон является параллельным переносом.

9. Дан правильный (2n+1)-угольник. Выяснить, чем является композиция осевых симметрий относительно всех его последовательных сторон.

ЗАНЯТИЕ 12. ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Доказать, что следующие преобразования являются движениями, и выяснить их геометрический смысл.

1. $$x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1$$
$$y' = \frac{11}{15}x - \frac{10}{15}y - \frac{2}{15}z - 2$$
$$z' = \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z - 1$$

2. $$x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y + \frac{15}{25}z + 3$$
$$y' = \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y - \frac{20}{25}z - 4$$
$$z' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 5$$

3. $$x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1$$
$$y' = -\frac{11}{15}x + \frac{10}{15}y + \frac{2}{15}z + 2$$
$$z' = \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z + 3$$

4. $$x' = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - 4$$
$$y' = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z + 2$$
$$z' = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z + 14$$

5. $$x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{10}{15}z + 7$$
$$y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{5}{15}z + 4$$
$$z' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 6$$

6. $x' = z + 1$

$y' = x$

$z' = y$

ЗАНЯТИЕ 13. ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Доказать, что следующие преобразования являются движениями, и выяснить их геометрический смысл:

1. $$x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1$$
$$y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2$$
$$z' = z + 3$$

2. $$x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 6$$
$$y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 12$$
$$z' = z$$

3. $$x' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 10$$
$$y' = -\frac{10}{15}x + \frac{11}{15}y - \frac{2}{15}z - 4$$
$$z' = -\frac{5}{15}x - \frac{2}{15}y + \frac{14}{15}z - 2$$

4. $$x' = \frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y - \frac{4}{9}z$$
$$y' = \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z$$
$$z' = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z$$

ЗАНЯТИЕ 14. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И МНОГОГРАННИКИ

1. Найти величину двугранного угла между соседними гранями авильного икосаэдра.

2. Найти величину двугранного угла между соседними гранями авильного додекаэдра.

3. Через центр грани правильного икосаэдра проведена прямая, рпендикулярная этой грани. В какой еще точке она пересечет верхность икосаэдра?

4. Точка A является вершиной правильного додекаэдра, O – нтр вписанного шара. Доказать, что прямая AO пересечет верхность додекаэдра еще в одной точке, являющейся вершиной.

5. Даны точки A(3,6,4), B(5,0,0), C(-1,4,4), D(1,2,-2), -5,4,3). Будет ли отрезок CE являться ребром многогранника = conv{A,B,C,D,E}?

6. Доказать, что многогранник ABCDEFA'B'C'D'E'F', где 0,-1,-3), B(1,0,2), C(1,1,5), D(0,3,9), E(-1,2,4), F(-2,0,-4), (1,1,-2), B'(2,2,3), C'(2,3,6), D'(1,5,10), E'(0,4,5), (-1,2,-3) является призмой. Будет ли эта призма выпуклым огогранником?

7. Доказать, что следующие поверхности:

эллипсоид,

одна полость конуса второго порядка,

одна полость двуполостного гиперболоида,

эллиптический параболоид

раничивают выпуклые множества.

8. Доказать, что при параллельном проектировании проекцией пуклого множества является выпуклое множество, а проекцией пуклого многогранника – выпуклый многоугольник.

9. На плоскости дано выпуклое множество P и вектор $\bar{a}$. Пусть – минимальная ширина полосы между двумя прямыми, параллельными ктору $\bar{a}$, содержащей множество P. Доказать, что центр тяжести ожества P удален от каждой из этих прямых на расстояние не нее $^{d}/3$.

10. Пусть на плоскости дано выпуклое множество P, у которого нтр тяжести находится в точке S, и Q – параллелограмм минимальной щади с центром в точке S, который содержит P. Доказать, что

параллелограмм, гомотетичный данному относительно центра S с коэффициентом $k = {}^1/_4$ содержится в множестве P.

ЗАНЯТИЕ I5. ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ

I. На прямой даны точки O_1, O_2, E так, что точка E лежит между O_1 и O_2 и $O_1E = 2\,EO_2$. Считая точки O_1, O_2, E проективной системой координат на данной прямой, построить геометрически точки M(3:I), N(I:-2).

2. На прямой даны точки O_1, O_2, E, где O_2 – середина отрезка O_1E. Считая O_1, O_2, E проективной системой координат на данной прямой, построить геометрически точки M(I:2), N(2:I), $P(1:{}^{-1}/_2)$.

3. Точка C является серединой отрезка AB, а точка D – середина отрезка AC. Найти сложное отношение (ABCD).

4. На проективной прямой даны точки A(2:I), B(3:2), C(-I:I). Найти координаты точки D такой, что $(ABCD) = {}^3/_5$.

5. На проективно-аффинной прямой введена проективная система координат с собственными базисными точками A_1, A_2 и собственной единичной точкой E. Аффинные координаты этих точек: $A_1=(a_1)$, $A_2=(a_2)$, E=(b).

I) Найти проективные координаты $x^1:x^2$ собственной точки M, имеющей аффинную координату x.

2) Найти аффинную координату x собственной точки N, имеющей проективные координаты $x^1:x^2$.

6. На прямой введена аффинная система координат. Принимая несобственную точку прямой и начало аффинной системы координат за базисные точки A_2 и A_1 проективной системы координат, а единичную точку E аффинной системы координат за единичную точку проективной системы координат, найти проективные координаты $x^1:x^2$ собственной точки, имеющей аффинную координату x.

7. Найти неподвижные точки проективного преобразования

$$\rho\,\bar{x}^1 = x^1 + 2x^2\ ,\quad \rho\,\bar{x}^2 = 4x^1 + 3x^2.$$

8. Доказать, что проективное преобразование

$$\begin{cases} \rho\, \bar{x}^1 = 3x^1 - 5x^2 \\ \rho\, \bar{x}^2 = x^1 + x^2 \end{cases}$$

не имеет неподвижных точек.

9. Найти все проективные преобразования прямой, квадрат каждого из которых равен тождественному преобразованию.

10. Доказать, что при проективном преобразовании прямой, оставляющем на месте несобственную точку, совокупность собственных точек прямой подвергается аффинному преобразованию.

ЗАНЯТИЕ 16. ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

1. На проективной плоскости заданы четыре точки $A(1:1:2)$, $B(3:-1:2)$, $C(11:-1:10)$, $D(3:7:10)$. Доказать, что эти точки лежат на одной прямой, и найти сложное отношение $(ABCD)$.

2. На проективной плоскости заданы три точки $A(2:1:-1)$, $B(1:0:2)$, $C(1:1:-3)$. Доказать, что эти точки лежат на одной прямой, и найти на этой прямой точку D такую, что $(ABCD) = 2$.

3. На плоскости заданы четыре точки, аффинные координаты которых $A(1,3)$, $B(0,1)$, $C(-1,-1)$, $D(3,7)$. Доказать, что эти точки лежат на одной прямой, и найти сложное отношение $(ABCD)$.

4. На плоскости заданы три точки, аффинные координаты которых $A(0,2)$, $B(2,-4)$, $C(-1,5)$. Доказать, что эти точки лежат на одной прямой, и найти на этой прямой точку D такую, что $(ABCD) = -2$.

5. На плоскости даны четыре прямые a: $y = 2x$, b: $y = 3x$, c: $y = \frac{1}{2}x$, d: $y = \frac{1}{3}x$. Доказать, что эти прямые принадлежат одному пучку, и найти сложные отношения $(abcd)$ и $(acbd)$.

6. На проективной плоскости даны четыре прямые
a: $x^2 - x^3 = 0$, b: $x^1 + 2x^2 - x^3 = 0$, c: $x^1 + x^2 = 0$,
d: $4x^1 + 9x^2 - 5x^3 = 0$. Доказать, что они проходят через одну точку, и найти сложное отношение $(abcd)$.

7. а) Задав на прямой точки A, B, C, построить геометрически точку D так, чтобы $(ABCD) = -1$.

б) Задав на прямой точки A, C, D, построить геометрически точку B так, чтобы $(ABCD) = -1$.

8. В треугольнике ABC прямая BK является медианой. Построить геометрически прямую m, четвертую гармоническую к прямым BA, BK, BC.

9. Сторонами O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 базисного треугольника проективной системы координат являются прямые, заданные относительно аффинной системы координат уравнениями $x - 4 = 0$, $y - 3 = 0$, $3x + 4y - 12 = 0$. Единичной точкой является точка $E(3,2)$. Найти:
1) проективные координаты точки M, аффинные координаты которой (1,1).
2) аффинные координаты точки N, проективные координаты которой (4:3:-6).

10. Вершины базисного треугольника и единичная точка проективной системы координат имеют следующие аффинные координаты: $O_1(1,1)$, $O_2(-1,1)$, $O_3(0,0)$, $E(0,{}^1/_2)$. Найти в этой проективной системе координат уравнения осей координат и уравнение несобственной прямой.

ЗАНЯТИЕ 17. ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Как запишется уравнение кривой $x^2 + y^2 = 1$ в проективной системе координат $O_1O_2O_3E$, если за стороны O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 базисного треугольника принять соответственно прямые $y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$, $x = 0$, а за единичную точку E – точку (1,0)?

2. Найти уравнение окружности, описанной около квадрата, принимая три его вершины за вершины базисного треугольника, а четвертую – за единичную точку проективной системы координат?

3. Найти поляру точки (-4,2) относительно кривой второго порядка $6x^2 - 5xy - 4y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$.

4. На прямой $x - 5y + 18 = 0$ найти точку, полярно сопряженную с точкой (-5,4) относительно линии $2xy - 6x + 4y - 1 = 0$.

5. Найти полюс прямой $3x - y + 6 = 0$ относительно кривой второго порядка $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$.

6. Найти полюс прямой $x = 0$ относительно кривой $x^2 + y^2 = 0$.

7. Пусть AB и CD - две хорды кривой второго порядка, пересекающиеся в точке P. Доказать, что точка пересечения прямых AC и BD лежит на поляре точки P.

Указание: применить теорему Паскаля к выродженным шестиугольникам AADBBC и ADDBCC.

8. Сформулировать и изобразить на рисунке утверждение, двойственное утверждению предыдущей задачи.

* * *

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968. 911 с.

2. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976. 384 с.