Ю.В. Кулаков, В.Н. Шамкин

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

Ю.В. Кулаков, В.Н. Шамкин

ДИСКРЕТНАЯ

МАТЕМАТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

Ю.В. Кулаков, В.Н. Шамкин

ДИСКРЕТНАЯ
МАТЕМАТИКА

Утверждено Ученым советом в качестве учебного пособия
для студентов специальности
«Системы автоматизированного проектирования»
всех форм обучения

Тамбов
Издательство ТГТУ
2004

УДК 519.1 (075)
ББК В174я73
К90

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор
Ю.Л. Муромцев

Кандидат физико-математических наук, доцент
А.А. Ефремов

Кулаков Ю.В., Шамкин В.Н.
К90 Дискретная математика: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 80 с.

Содержит теоретический материал, задания и упражнения, ответы и список рекомендуемой литературы.

Предназначено для студентов специальности «Системы автоматизированного проектирования» всех форм обучения. Может быть использовано студентами специальности «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем».

УДК 519.1 (075)
ББК В174я73

ISBN 5-8265-0313-0

Учебное издание

Кулаков Юрий Владимирович,
Шамкин Валерий Николаевич

ДИСКРЕТНАЯ
МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинкина
Инженер по компьютерному макетированию Е.В. Кораблева

Подписано к печати 24.09.2004
Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Гарнитура Times. Объем: 4,65 усл. печ. л.; 4,6 уч.-изд. л.
Тираж 150 экз. С. 637

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, г. Тамбов, ул. Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика является относительно молодой наукой, высокий интерес к которой в настоящее время связан с бурно развивающимися средствами вычислительной техники и информационными технологиями, в том числе и системами автоматизированного проектирования. Дисциплина «Дискретная математика» обеспечивает фундаментализацию образования, формирование мировоззрения и развитие логического мышления.

Создание данного учебного пособия стало возможным благодаря чтению авторами в течение ряда лет одноименного курса для студентов, обучающихся по специальности «Системы автоматизированного проектирования». Пособие предназначено в первую очередь для студентов упомянутой специальности и полностью соответствует действующему Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования. Оно может быть также использовано и для подготовки студентов по другим специальностям, например, по специальности «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем».

Пособие знакомит обучающихся с важнейшими разделами дискретной математики и освещает такие понятия, как множество, функция, отображение, операция; алгебра, фундаментальные алгебры; отношения; модель; булевы функции; минимизация булевых функций в классе ДНФ; полнота системы булевых функций; взвешенный граф и его матричное задание; связность и сильная связность графа; цикломатика и планарность графа; разрешимые и неразрешимые проблемы.

Рассматриваемые в учебном пособии понятия иллюстрируются необходимым количеством примеров. Каждый параграф заканчивается тщательно подобранными задачами и упражнениями, для которых приведены правильные ответы.

Надеемся, что данная учебная разработка будет способствовать приобретению студентами необходимых знаний, умений и навыков, которые помогут им не только в изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин, но и в решении многих практических задач.

1 МНОЖЕСТВО, ФУНКЦИЯ, ОТОБРАЖЕНИЕ, ОПЕРАЦИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества.

Множество – *это объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Такое определение понятия множества дал основатель теории множеств Кантор. Это понятие является в математике первичным и поэтому не имеет строгого определения, удовлетворяющего современным требованиям. Множества будем обозначать, как правило, большими (прописными) буквами латинского алфавита. Объекты, которые образуют множество, называют* **элементами** *множества и обозначают малыми (строчными) буквами латинского алфавита. Если элемент* т *принадлежит множеству* М, *то будем использовать запись* $т \in М$, *в противном случае – запись* $т \notin М$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**. *Если же множество не содержит ни одного элемента, то оно называется* **пустым** *и обозначается* $\varnothing$.

Множество может быть задано различными способами: перечислением элементов (конечные множества) или указанием их свойств. При этом для задания множеств используют фигурные скобки { }. Например, множество М *цифр десятичного алфавита можно задать в виде* $М = \{0, 1, ..., 9\}$ *или* $М = \{i \,/\, i$ *– целое,* $0 \le i \le 9\}$, *где справа от наклонной черты указаны свойства элементов этого множества. Множество* М *четных чисел можно записать в виде* $М = \{т \,/\, т$ *– четное число*$\}$.

Множество М' *называется* **подмножеством** *множества* М *тогда и только тогда, когда любой элемент множества* М' *принадлежит множеству* М:

$$М' \subset М \leftrightarrow (т \in М' \to т \in М),$$

где $\subset$ *– знак включения подмножества;* $\to$ *– «если..., то... »,* $\leftrightarrow$ *– «тогда и только тогда, когда ...». В частности, множества* М' *и* М *могут совпадать.*

Не включение М' *в* М *обозначается так:* $М' \not\subset М$.

Очевидно, что если множество $М_a$ *– подмножество множества* $М_b$ *и множество* $М_b$ *– подмножество множества* $М_a$, *то оба этих множества состоят из одних и тех же элементов. Такие множества называют* **равными**: $М_a = М_b$. *Если же множество* М' *– подмножество множества* М, *а множество* М *не является подмножеством множества* М', *то множество* М' *называется* **собственным подмножеством** *множества* М. *Для обозначения этого факта будем использовать двойной знак включения подмножеств* $\subset\subset$, *т.е. писать* $М' \subset\subset М$.

Для каждого множества М *существует множество, элементами которого являются подмножества множества* М *и только они. Такое множество будем называть* **семейством множества** М *или* **булеаном** *этого множества и обозначать* В(М), *а множество* М – **универсальным, универсумом** *или* **пространством** *и обозначать* 1.

Рассмотрим образование булеана В(1) *от универсума* $1 = \{y, x, a\}$. *Первым элементом является пустое множество* $\varnothing$. *Кроме этого в булеан войдут* $\binom{|1|}{1}$ [$\binom{|1|}{1}$ *– число сочетаний из* $|1|$ *по 1] подмножеств универсума, содержащих по одному элементу, затем* $\binom{|1|}{2}$ *подмножеств, содержащих по два элемента, ..., и, наконец, подмножество, содержащее все элементы множества* 1. *Здесь* $|\,М\,|$ *– количество элементов конечного множества* М, *в дальнейшем называемое* **мощностью множества.**

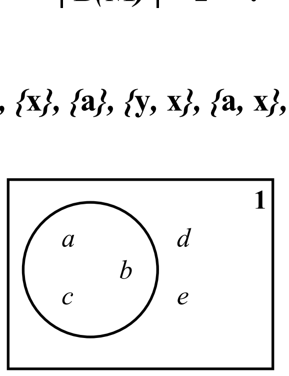
Очевидно, что мощность $|\,В(М)\,|$ *булеана от универсума* М *равна* $2^{|М|}$:

$$|\,В(М)\,| = 2^{|М|}.$$

В рассматриваемом случае

$$В(1) = \{\varnothing, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{a, x\}, \{a, y\}, \{y, x, a\}\}.$$

Множество также часто задают графически с помощью **диаграммы Эйлера**. *Например, задание множества* $\{a, b, c\}$ *в про-*



странстве** $1 = = \{a, b, c, d, e\}$ **приведено на рис. 1, где замкнутая линия, называемая **кругом Эйлера**, ***соответствует рассматриваемому множеству и ограничивает его элементы. При этом рамка, в верхнем правом углу которой стоит 1, ограничивает элементы пространства. Другие способы задания множеств будут рассмотрены по мере необходимости.***

Рис. 1

Одним из важных понятий теории множеств является понятие декартова произведения множеств.

Декартовым произведением $M_a \times M_b$ **множеств** M_a ***и*** M_b ***называется множество*** M ***вида***

$$M = \{(m_i, m_j) / m_i \in M_a, m_j \in M_b\}.$$

Здесь и далее круглыми скобками ( ) обозначается **последовательность**, ***т.е. множество, в котором зафиксирован порядок элементов.***

Подмножество $F \subset M_x \times M_y$ ***называется*** **функцией**, ***если для каждого элемента*** $x \in M_x$ ***найдется не более одного элемента*** $y \in M_y$ ***вида*** $(x, y) \in F$***; при этом, если для каждого элемента*** x ***имеется точно один элемент*** y ***вида*** $(x, y) \in F$***, то функция называется*** **всюду (полностью) определенной**, ***в противном случае*** – **частично определенной (недоопределенной)**. ***Множество*** M_x ***образует*** **область определения функции** F, ***множество*** M_y – **область значений функции** F. ***Часто вместо записи*** $(x, y) \in F$ ***используют запись*** $y = F(x)$***; при этом элемент*** x ***называют*** **аргументом** ***или*** **переменной**, ***а*** y – **значением функции** F.

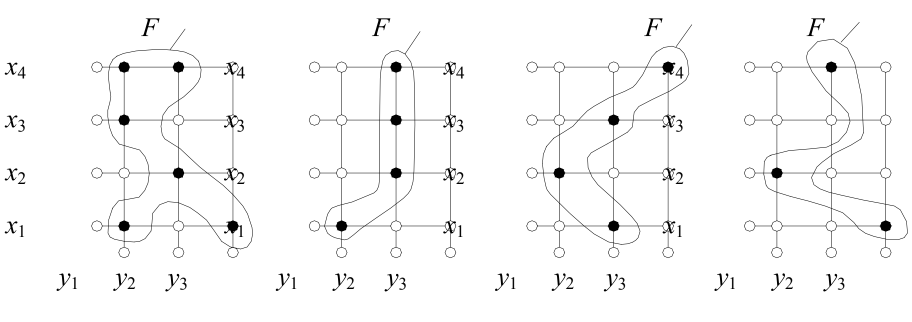
Функция $y = F(x)$ ***называется*** **сюръективной**, ***если для каждого элемента*** $y \in M_y$ ***найдется элемент*** $x \in M_x$ ***вида*** $(x, y) \in F$.

Полностью определенная функция $y = F(x)$ ***называется также*** **отображением** ***(из)*** M_x ***в*** M_y, ***а в случае, если она сюръективна, – отображением (из)*** M_x ***на*** M_y.

Имея дело с отображениями вместо $y = F(x)$, ***часто пишут*** $y = x^F$, ***а об элементах области значений и области определения функции говорят, как об образах и прообразах соответственно. Так элемент*** $y \in M_y$ ***называют*** **образом** ***элемента*** x ***при отображении*** F, ***а подмножество*** $\{x / x \in M_x\}$, ***для каждого из элементов которого существуют элементы*** $(x, y) \in F$, – **прообразом** ***элемента*** y.

Декартову произведению двух множеств можно сопоставить прямоугольную решетку, узлы которой взаимно однозначно отвечают элементам декартова произведения, а подмножество декартова произведения на решетке отметить штриховкой соответствующих узлов.

На рис. 2, **а** ***изображено подмножество декартового произведения множеств*** $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ***и*** $M_y = \{y_1, y_2, y_3\}$, ***не являющееся функцией; на рис. 2,*** **б** – ***являющееся полностью определенной функцией и отображением (из)*** M_x ***в*** M_y***; на рис. 2,*** **в** – ***полностью определенной функцией и отображением (из)*** M_x ***на*** M_y***; на рис. 2,*** **г** – ***частично определенной функцией.***



а) *б)* *в)* *г)*

РИС.

Количество аргументов функции определяет* местность функции. *Выше были рассмотрены одноместные функции.

***Частным случаем одноместной функции является одноместная операция. Под* одноместной операцией O_1 *в множестве* M *понимается одноместная функция* $y = F(x)$*, область определения и область значений которой совпадают:* $M_x = M_y = M$.**

Аналогично понятию декартова произведения двух множеств определим декартово произведение* n *множеств.

Декартовым произведением

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \prod_{i=1}^{n} M_i$$

множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *называется множество*

$$M = \{(m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{in}) / m_{i1} \in M_1, m_{i2} \in M_2, \ldots, m_{in} \in M_n\}.$$

***Элементами декартова произведения* $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ *являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из* n *элементов, причем первый элемент принадлежит множеству* M_1*, второй – множеству* M_2*, ...,* n*-й элемент – множеству* M_n.**

***Если множество* M_x *в определении функции* $y = F(x)$ *является декартовым произведением* n *множеств* $M_{x1}, M_{x2}, \ldots, M_{xn}$*, то получаем определение* n-местной функции**

$$y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Частным случаем* n*-местной функции* $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *является* n*-местная операция. Под* n-местной операцией O_n *в множестве* M *понимается* n*-местная функция* $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, области определения аргументов и область значений которой совпадают:* $M_{x1} = M_{x2} = \ldots = M_{xn} = M_y = M$. *Таким образом,* n*-местная операция над* n *элементами множества* M *определяет некоторый элемент этого же множества.

Рассмотрим пространство 1 и определим в нем четыре операции над множествами: объединение, пересечение, разность и дополнение.

Объединением $M_a \cup M_b$ *двух множеств* M_a *и* M_b *является множество* M*, состоящее из элементов множества* M_a *и из элементов множества* M_b*:*

$$M = M_a \cup M_b = \{m_i / m_i \in M_a \text{ или } m_i \in M_b\}.$$

Пересечением $M_a \cap M_b$ *двух множеств* M_a *и* M_b *является множество* M*, состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству* M_a*, так и множеству* M_b*:*

$$M = M_a \cap M_b = \{m_i / m_i \in M_a \text{ и } m_i \in M_b\}.$$

Разностью $M_a \setminus M_b$ *множеств* M_a *и* M_b *является множество* M*, состоящее из элементов, принадлежащих множеству* M_a *и не принадлежащих множеству* M_b*:*

$$M = M_a \setminus M_b = \{m_i / m_i \in M_a \text{ и } m_i \notin M_b\}.$$

Введенные операции являются двухместными. Рассмотрим операцию дополнения, являющуюся одноместной.

Дополнением $\overline{M}$ *множества* M *является множество*

$$\overline{M} = \{m_i / m_i \notin M\}.$$

Операции объединения, пересечения, разности и дополнения проиллюстрированы на рис. 3,* а – г *соответственно, а результаты операций обозначены заштрихованными областями.

Используя эти операции, можно выражать одни множества через другие, при этом сначала выполняется одноместная операция дополнения, затем пересечения и в последнюю очередь операция объединения (разности). Для изменения этого порядка в выражении используют скобки.

Рассмотрим дополнение множества, являющегося пересечением множеств* M_a *и* M_b*. Оно равно объединению дополнений множеств* M_a *и* M_b*:

$$\overline{M_a \cap M_b} = \overline{M_a} \cup \overline{M_b}.$$

В этом можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера, представленных на рис. 4.

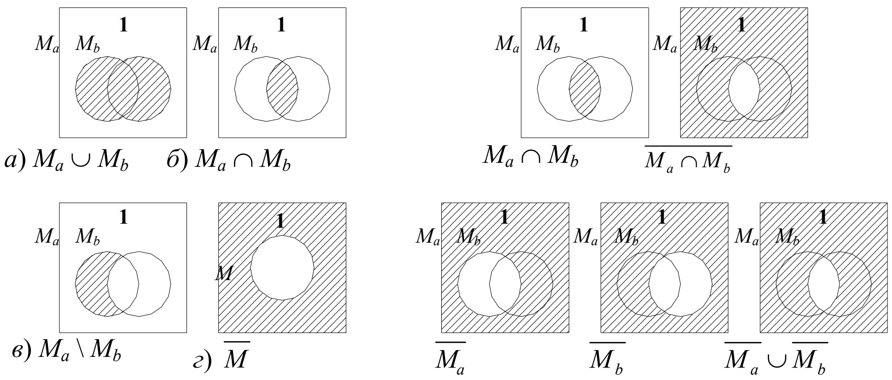


РИС.

Рис. 4

Таким образом, множество можно задать выражением, в которое входят идентификаторы (указатели) множеств, операции и, может быть, скобки. Такой способ задания множества называется **аналитическим.**

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1 Представить перечислением элементов булеан $B(\mathbf{1})$, образованный от универсума **1**, равного:

а) $\{a, b\}$; б) $\{b, c, d\}$; в) $\{1, 2\}$; г) $\{2, 3, 4\}$.

2 Изобразить диаграмму Эйлера, задающую множества A, B и C ($A \cap B \cap C \neq \varnothing$) и обозначить на ней штриховкой множество:

а) $B \setminus (\overline{A \cup C})$; б) $C \cup (\overline{A} \cap B)$; в) $\overline{A} \setminus (B \cap \overline{C})$; г) $A \cup (C \setminus \overline{B})$.

3 Известно, что из 100 студентов увлекаются:

а) спортом – 19; музыкой – 21; живописью – 23; спортом и музыкой – 7; музыкой и живописью – 9; спортом и живописью – 8; спортом, музыкой и живописью – 3;

б) спортом – 25; музыкой – 38; живописью – 12; спортом и музыкой – 15; музыкой и живописью – 3;

в) спортом – 23; музыкой – 26; живописью – 31; спортом и музыкой – 10; музыкой и живописью – 13; спортом и живописью– 12; спортом, музыкой и живописью – 4;

г) спортом – 17; музыкой – 25; живописью – 32; спортом и живописью – 2; музыкой и живописью – 5.

Изобразить соответствующую диаграмму Эйлера и определить, сколько студентов:

а) ничем не увлекаются; в) увлекаются только спортом;

б) увлекаются только музыкой; г) ничем не увлекаются.

4 Представить перечислением элементов декартово произведение $A \times B$, если:

а) $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$; в) $A = \{b, c\}$, $B = \{2, 3\}$;

б) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$; г) $A = \{3, 4\}$, $B = \{b, c, e\}$.

5 Представить перечислением элементов декартово произведение $A \times B \times C$, если:

а) $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$;

б) $A = \{\text{т}, \text{д}\}$, $B = \{\text{о}\}$, $C = \{?, !\}$;

в) $A = \{3, 4\}$, $B = \{d, e\}$, $C = \{ * \}$;

г) $A = \{\text{р}, \text{т}\}$, $B = \{\text{а}, \text{о}\}$, $C = \{\text{к}, \text{м}\}$.

6 Нарисовать прямоугольную решетку, узлы которой взаимно однозначно соответствуют элементам декартова произведения $X \times Y$, и задать штриховкой соответствующих узлов частично определен-

ную одноместную функцию F_1^1 и полностью определенную одноместную функцию F_1^2 с областью определения X и областью значений Y:

а) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$;
б) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;
в) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;
г) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

7 Задать перечислением элементов частично определенную двухместную функцию F_2^1 и полностью определенную двухместную функцию F_2^2 с областью определения $X \times Y$ и областью значений Z:

а) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$;
б) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$;
в) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$;
г) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

8 Нарисовать прямоугольную решетку, узлы которой взаимно однозначно соответствуют элементам декартова произведения $X \times Y$, и задать штриховкой соответствующих узлов отображение R_1^1 (из) X в Y и отображение R_1^2 (из) X на Y:

а) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;
б) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$;
в) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$;
г) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

9 Нарисовать прямоугольную решетку, узлы которой взаимно однозначно соответствуют элементам декартова произведения $M \times M$, и задать штриховкой соответствующих узлов частично определенную одноместную операцию O_1^1 и полностью определенную одноместную операцию O_1^2 в множестве M:

а) $M = \{a, b\}$;
б) $M = \{a, b, c\}$;
в) $M = \{1, 2, 3, 4\}$;
г) $M = \{2, 3, 4\}$.

10 Задать перечислением элементов частично определенную двухместную операцию O_2^1 и полностью определенную двухместную операцию O_2^2 в множестве M:

а) $M = \{a, b\}$;
б) $M = \{1, 2, 3\}$;
в) $M = \{0, 1\}$;
г) $M = \{a, b, c\}$.

2 ПОНЯТИЕ АЛГЕБРЫ. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Алгеброй А ***называется совокупность*** **$\langle\ \rangle$** ***множества*** **M** ***с заданными в нем операциями*** **S = {f_{11}, f_{12}, ..., f_{1n_1}, f_{21}, f_{22}, ..., f_{2n_2}, ..., f_{m1}, f_{m2}, ..., f_{mn_m}}:**

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{M}, \mathbf{S} \rangle,$$

где множество **M – носитель, S – сигнатура** ***алгебры. Первый символ нижнего индекса идентификатора операции обозначает ее*** **местность.**

Рассмотрим **фундаментальные алгебры.** ***Алгебра вида*** **$\langle$M, $f_2$$\rangle$** ***называется*** **группоидом.**

Если **f_2** ***– операция типа умножения (×), то группоид называют*** **мультипликативным*****; если*** **f_2** ***– операция типа сложения (+), то*** **аддитивным.**

Рассмотрим группоид **A = $\langle$M, $f_2$$\rangle$*****, при этом операцию*** **f_2** ***обозначим как*** **°*****. Тогда элемент*** **e $\in$ M** ***называется*** **правым нейтральным элементом** ***группоида*** **A*****, если для всякого*** **m $\in$ M** ***выполняется равенство*** **m ° e = m*****; элемент*** **e $\in$ M** ***группоида*** **A = $\langle$M, °$\rangle$** ***называется*** **левым нейтральным элементом** ***группоида*** **A*****, если для всех*** **m $\in$ M** ***выполняется равенство*** **e ° m = m.** ***В дальнейшем для краткости вместо слов «все» или «всякий» будем использовать символ $\forall$. Если элемент*** **e $\in$ M** ***группоида*** **A = $\langle$M, °$\rangle$** ***является одновременно левым и правым нейтральным элементом, то его называют*** **двусторонним нейтральным элементом** ***или просто*** **нейтраль-**

ным элементом. ***Никакой группоид не может иметь более одного нейтрального элемента. Действительно, если***

$$m \circ e = e \circ m = m \quad \textit{и} \quad m \circ e' = e' \circ m = m$$

справедливо для $\forall m \in M$, ***то***

$$e' = e' \circ e = e.$$

Если группоид $\langle M, \circ \rangle$ ***мультипликативный, то нейтральный элемент называется*** **единицей** ***и обозначается символом 1; если аддитивный, то нейтральный элемент называется*** **нулем** ***и обозначается символом 0.***

Группоид $A = \langle M, \circ \rangle$ ***называется*** **идемпотентным**, ***если его сигнатура удовлетворяет закону идемпотентности***

$$(\forall m \in M)\ (m \circ m = m).$$

Группоид $\langle M, \circ \rangle$, ***сигнатура которого удовлетворяет закону коммутативности***

$$(\forall x, y \in M)\ (x \circ y = y \circ x),$$

называется **коммутативным** ***или*** **абелевым.**

Группоид $\langle M, \circ \rangle$, ***в котором выполняется закон ассоциативности***

$$(\forall x, y, z \in M)\ (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z),$$

называется **ассоциативным** ***или*** **полугруппой.**

Полугруппа $\langle M, \circ \rangle$, ***в которой выполнимы обратные операции: для любых*** $a, b \in M$ ***каждое из уравнений*** $a \circ x = b$, $y \circ a = b$ ***обладает единственным решением, называется*** **группой.**

Проиллюстрируем понятие группы на примере **группы подстановок**, ***содержащей шесть элементов.***

Рассмотрим три элемента: x_1, x_2, x_3. ***Существует шесть перестановок из трех элементов:*** $x_1 x_2 x_3$, $x_1 x_3 x_2$, $x_2 x_1 x_3$, $x_2 x_3 x_1$, $x_3 x_1 x_2$, $x_3 x_2 x_1$. ***Запишем две перестановки из трех элементов друг под другом:***

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Эта запись означает, что x_1 ***переходит в*** x_2, x_2 ***- в*** x_3, x_3 ***- в*** x_1.

Число возможных подстановок равно числу перестановок. Введем следующие обозначения для шести возможных подстановок:

$$a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix},\ e = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Введем операцию умножения над подстановками. **Произведением** ***подстановок называется подстановка, получаемая в результате последовательного выполнения сначала первой, а затем второй из перемножаемых подстановок. Например,***

$$c \times b = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = e.$$

Значение выражения $\alpha \times \beta$ ***определяет табл. 1.***

В рассматриваемой алгебре $\langle M, \times \rangle$ ***выполняется закон ассоциативности, но не выполняется закон коммутативности.***

Таблица 1

α	β					
	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	d	c	f	e
c	c	e	a	f	b	d
d	d	f	b	e	a	c

e	e	c	f	a	d	b
f	f	d	e	b	c	a

Алгебра $\langle$ **M**, $\times$, + $\rangle$, *которая по умножению является мультипликативным группоидом, по сложению – абелевой группой, причем умножение связано со сложением законами* **дистрибутивности**

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c,$$

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a,$$

называется **кольцом.**

Кольцо, в котором все отличные от нуля элементы составляют группу по умножению, называется **телом.**

Тело, у которого мультипликативная группа абелева, называется **полем.**

Рассмотрим **алгебру множеств** *(***алгебру Кантора***)*

$$A_k = \langle B(1), \cup, \cap, \bar{\ } \rangle,$$

носителем которой является булеан универсального множества 1, сигнатурой – операции объединения $\cup$*, пересечения* $\cap$ *и дополнения* $\bar{\ }$.

Для операций алгебры Кантора выполняются следующие законы:

– коммутативности объединения и пересечения

$$M_a \cup M_b = M_b \cup M_a, \quad M_a \cap M_b = M_b \cap M_a;$$

– ассоциативности объединения и пересечения

$$M_a \cup (M_b \cup M_c) = (M_a \cup M_b) \cup M_c,$$

$$M_a \cap (M_b \cap M_c) = (M_a \cap M_b) \cap M_c;$$

– дистрибутивности пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения

$$M_a \cap (M_b \cup M_c) = M_a \cap M_b \cup M_a \cap M_c,$$

$$M_a \cup (M_b \cap M_c) = (M_a \cup M_b) \cap (M_a \cup M_c);$$

– идемпотентности объединения и пересечения

$$M_a \cup M_a = M_a, \quad M_a \cap M_a = M_a;$$

– действия с универсальным *1* **и пустым** $\varnothing$ **множествами**

$$M \cup \varnothing = M, \quad M \cap \varnothing = \varnothing, \quad M \cup 1 = 1, \quad M \cap 1 = M,$$

$$M \cup \overline{M} = 1, \; M \cap \overline{M} = \varnothing;$$

– де-Моргана

$$\overline{M_a \cap M_b} = \overline{M_a} \cup \overline{M_b}, \quad \overline{M_a \cup M_b} = \overline{M_a} \cap \overline{M_b};$$

– двойного дополнения

$$\overline{\overline{M}} = M.$$

Алгебра Кантора по аддитивной операции объединения и мультипликативной операции пересечения является абелевой полугруппой, так как для этих операций выполняются законы коммутативности и ассоциативности, но она не является группой, поскольку уравнения $M_a \cup X = M_b$, $M_a \cap X = M_b$ *не имеют решения, например для случая, когда множества не пересекаются:* $M_a \cap M_b = \varnothing$*. Следовательно, алгебра Кантора по двухместным операциям* $\cup$ *и* $\cap$ *не является кольцом.*

Задачи и упражнения

1 ***Установить, является ли группоидом, идемпотентным группоидом, абелевым группоидом, полугруппой, абелевой полугруппой, группой, абелевой группой алгебра* A = ⟨M, S⟩ *с носителем* M *и сигнатурой* S*:***

а)* M = *{0, 1},* S = *{⊕}, где ⊕ – операция сложения по модулю 2;

б)* M = *{0, 1},* S = *{⊗}, где ⊗ – операция умножения по модулю 2;

в)* M = *{∅,{a}},* S = *{∪}, где ∪ – операция объединения множеств;

г)* M = *{∅,{a}},* S = *{∩}, где ∩ – операция пересечения множеств.

2 ***Установить, является ли кольцом, телом, полем алгебра* A = ⟨M, S⟩ *с носителем* M *и сигнатурой* S*:***

а)* M = *{0, 1},* S = *{⊕, ⊗}, где ⊕, ⊗ – операции сложения и умножения по модулю 2 соответственно;

б)* M = *{∅,{a}},* S = *{∪, ∩}, где ∪, ∩ – операции объединения и пересечения множеств соответственно.

3. ОТНОШЕНИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ И СВОЙСТВА. ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ

Фундаментальным понятием дискретной математики является понятие *отношения*, которое используют для обозначения связи между какими-либо объектами.

Квадратом множества M называется декартово произведение двух равных между собой множеств: $M \times M = M^2$. *Бинарным отношением T* в множестве M называется подмножество его квадрата: $T \subset M^2$. Говорят, что элементы m_i и m_j находятся в отношении T, если $(m_i, m_j) \in T$. Совокупность множества M с заданным в нем бинарным отношением $T \subset M^2$ называется *графом G*:

$$G = \langle M, T\rangle,$$

где M – *носитель графа* (множество вершин); T – *сигнатура графа* (множество дуг).

Рассмотрим задание бинарного отношения с помощью матрицы смежности и фактор-множества.

При матричном задании используют двумерную таблицу – *матрицу смежности*, каждой строке (столбцу) которой взаимно однозначно сопоставляют элемент множества M. Тогда каждая клетка (i, j) таблицы взаимно однозначно соответствует элементам множества M^2. Клетку (i, j), которая соответствует элементу, принадлежащему $T \subset M^2$, как-то отличают, например зачерняют или помещают в нее единицу; остальные клетки оставляют незачерненными или записывают в них нули.

Рассмотрим предложенную фон Нейманом блок-схему ЭВМ, которая состоит из множества устройств

$$M = \{a, b, c, d, e\},$$

где a – устройство ввода; b – арифметическое устройство (процессор); c – устройство управления; d – запоминающее устройство; e – устройство вывода.

Рассмотрим информационный обмен между устройствами m_i и m_j, которые находятся в отношении T, если информация из устройства m_i поступает в устройство m_j. Это отношение можно задать в виде матрицы смежности следующим образом:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}$$

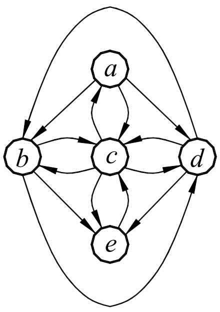


Рис. 5

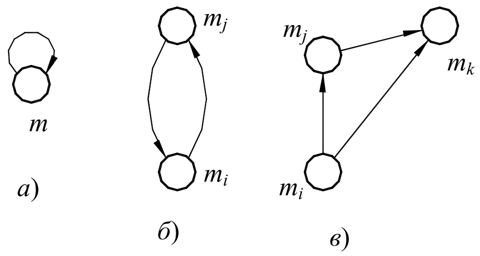


Рис. 6

Граф G, задаваемый рассмотренным отношением T, изображен на рис. 5. На этом рисунке (и в дальнейшем) вершины графа изображаются в виде кружков (иногда в виде точек), дуги – в виде стрелок, исходящих из m_i и входящих в m_j, если $(m_i, m_j) \in T$; при этом вершина m_i – *начало дуги,* а вершина m_j – ее *конец.*

Рассмотрим задание бинарного отношения с помощью фактор-множества.

Окрестностью единичного радиуса элемента $m_i \in M$ называется множество элементов $m_j \in M$ таких, что $(m_i, m_j) \in T$, $T \subset M^2$. Часто вместо термина *окрестность* единичного радиуса используют термин *сечение.*

Множество окрестностей единичного радиуса, взятых для всех элементов множества M при задании в нем отношения $T \subset M^2$, называется *фактор-множеством* M/T множества M по отношению T. Фактор-множество M/T полностью определяет отношение T.

Зададим фактор-множество для рассматриваемого примера в виде двух строк, в первой из которых поместим элементы множества M, во второй под каждым элементом запишем окрестность единичного радиуса этого элемента:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \{b, c, d\} & \{c, d, e\} & \{a, b, d, e\} & \{b, c, e\} & \{c\} \end{array} \right\|$$

Бинарное отношение, задаваемое графом $G = \langle M, T\rangle$ (рис. 5), можно задать и перечислением его дуг:

$$M = \{a, b, c, d, e\},\ T = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, b), (d, c), (d, e), (e, c)\}.$$

Рассмотрим наиболее важные свойства бинарных отношений.

Отношение T в множестве M называется *рефлексивным,* если

$$(\forall\ m \in M)\ ((m, m) \in T).$$

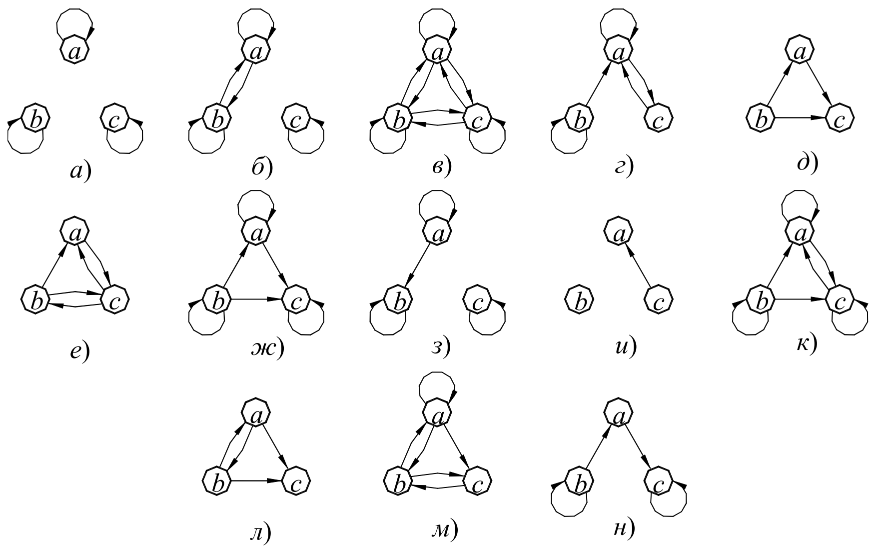


Рис. 7

Свойство рефлексивности при задании отношения матрицей смежности характеризуется тем, что все элементы, лежащие на главной диагонали, отмечены (равны 1 или зачернены); при задании отношения графом каждый элемент имеет *петлю* – дугу вида (m, m) (рис. 6, *а*). Рефлексивными бинарными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются отношения, представленные с помощью графов на рис. 7, *а*, *б*, *в*, *ж*, *з*, *к*.

Отношение T в множестве M называется *антирефлексивным,* если

$$(\forall\ m \in M)\ ((m, m) \notin T).$$

Свойство антирефлексивности при задании отношения матрицей смежности характеризуется тем, что ни один элемент, лежащий на главной диагонали, не отмечен (равен 0 или не зачернен); при задании отношения графом ни один его элемент не имеет петлю. Антирефлексивными бинарными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются отношения, представленные на рис. 7, *д*, *е*, *и*, *л*.

Отношение T в множестве M будем называть *нерефлексивным,* если оно не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным. Нерефлексивными являются отношения на рис. 7, *г*, *м*, *н*.

Отношение T в множестве M называется *симметричным,* если

$$(\forall\ a, b \in M, a \neq b)\ ((a, b) \in T \to (b, a) \in T).$$

Матрица смежности симметричного отношения является симметричной относительно главной диагонали, а при задании отношения в виде графа следствием симметричности является наличие между всякой парой вершин, находящихся в отношении T, двух противоположно направленных дуг (рис. 6, *б*). Симметричными бинарными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются отношения, представленные на рис. 7, *а*, *б*, *в*.

Отношение T в множестве M называется *антисимметричным,* если

$$(\exists\ a, b \in M, a \neq b)\ ((a, b) \in T) \text{ и}$$
$$(\forall\ a, b \in M, a \neq b)\ ((a, b) \in T \to (b, a) \notin T).$$

Антисимметричными бинарными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются отношения, представленные на рис. 7, *д*, *ж*, *з*, *и*, *н*.

Отношение T в множестве M будем называть *несимметричным,* если оно не является ни симметричным, ни антисимметричным. Несимметричными являются отношения на рис. 7, *г*, *е*, *к*, *л*, *м*.

Отношение T в множестве M называется *транзитивным,* если

$$(\forall a, b, c \in M, a \neq b, a \neq c, b \neq c)((a, b) \in T, (b, c) \in T \to (a, c) \in T).$$

В графе, задающем транзитивное отношение T, для всякой пары дуг таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья дуга, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй (рис. 6, *в*), – *транзитивно замыкающая дуга.* Транзитивными бинарными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются отношения, представленные на рис. 7, *а*, *б*, *в*, *д*, *ж*, *з*, *и*, *к*, *л*.

Отношение T в множестве M называется *антитранзитивным*, если

$$(\exists a, b, c \in M, a \neq b, a \neq c, b \neq c)\ ((a, b) \in T \text{ и } (b, c) \in T) \text{ и}$$
$$(\forall a, b, c \in M, a \neq b, a \neq c, b \neq c)\ ((a, b) \in T, (b, c) \in T \rightarrow (a, c) \notin T).$$

Антитранзитивными бинарными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются отношения, представленные на рис. 7, *г*, *н*.

Отношение T в множестве M будем называть *нетранзитивным,* если оно не является ни транзитивным, ни антитранзитивным. Нетранзитивными являются отношения на рис. 7, *е*, *м*.

Используя эти свойства, определим бинарное отношение упорядоченности, имеющее большое теоретическое и практическое значение.

Бинарное отношение R в множестве M, обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называется *отношением упорядоченности* и обозначается символом $\leq$. Отношениями упорядоченности $\leq$ являются отношения, заданные графами на рис. 7, *ж*, *з*.

Бинарное отношение в множестве M, обладающее свойствами антирефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называется *отношением строгой упорядоченности* и обозначается символом $<$. Отношения строгой упорядоченности представлены на рис. 7, *д*, *и*.

Отношение, обладающее свойствами рефлексивности и транзитивности, называется *отношением предпорядка*. Отношение предпорядка задано графом на рис. 7, *к*.

Рассмотрим отношение включения $\subset$. Это отношение рефлексивно: $M_i \subset M_i$ (множество M_i включает само себя); антисимметрично: если $M_i \subset M_j$ и $M_j \subset M_i$, то $M_i = M_j$; транзитивно: если $M_i \subset M_j$ и $M_j \subset M_k$, то $M_i \subset M_k$. Следовательно, отношение включения является отношением упорядоченности $\leq$.

Множество M с заданным в нем отношением упорядоченности, называется *упорядоченным* этим отношением.

Если любые два элемента m_i и m_j находятся в отношении упорядоченности, то это множество называют *линейно упорядоченным*, в противном случае – *частично упорядоченным*. Линейно упорядоченные множества заданы на рис. 7, *д*, *ж*; частично упорядоченные – на рис. 7, *з*, *и*.

На рис. 8 приведен пример частично упорядоченного множества, при этом в качестве отношения упорядоченности рассмотрено отношение включения множеств $\subset$.

Иногда частично упорядоченные отношением $\leq$ множества изображают в виде графов $H = \langle V, \leq \rangle$, у которых удалены все петли и транзитивно замыкающие дуги. Граф $H = \langle V, \leq \rangle$, задающий частично упорядоченное множество с удаленными петлями и транзитивно замыкающими дугами, называется *диаграммой Хассе*. Диаграмма Хассе H, задающая частично упорядоченное множество, которое показано на рис. 8, изображена на рис. 9, *а*.

Под *изоморфизмом* между двумя упорядоченными множествами M и M^* будем понимать взаимно однозначное соответствие η между M и M^* такое, что из $m_i \leq m_j$ следует $\eta(m_i) \leq \eta(m_j)$ и из $\eta(m_i) \leq \eta(m_j)$ следует $m_i \leq m_j$.

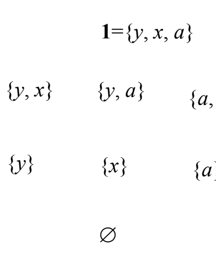


Рис.

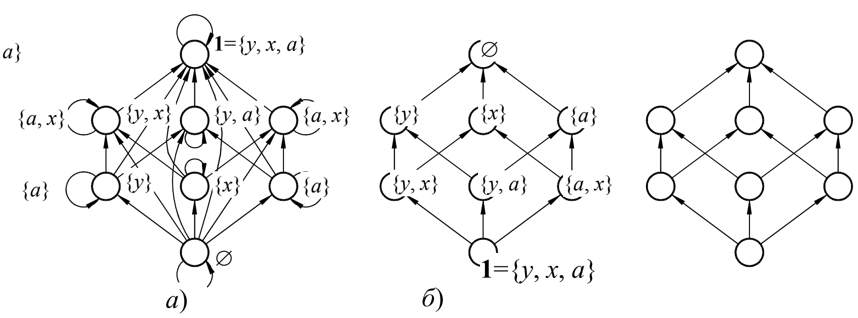


Рис. 9

Два упорядоченных множества называются *изоморфными* тогда и только тогда, когда между ними существует изоморфизм.

Под отношением $\overline{R}$, обратном R, понимают такое отношение, при котором $(m_i, m_j) \in \overline{R}$ тогда и только тогда, когда $(m_j, m_i) \in R$.

Принцип, в соответствии с которым отношение, обратное отношению упорядоченности, также является отношением упорядоченности, называется *принципом двойственности*.

Двойственным к частично упорядоченному множеству называется частично упорядоченное множество, определенное на том же носителе с помощью обратного отношения. На рис. 9, *б* изображена диаграмма, являющаяся двойственной к диаграмме Хассе (рис. 9, *а*).

Другим важным бинарным отношением является отношение эквивалентности. Бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называется отношением *эквивалентности* и обозначается $\sim$.

Классом эквивалентности $K(m_a)$ элемента m_a называется множество всех элементов m_i, каждый из которых находится с этим элементом в отношении эквивалентности

$$K(m_a) = \{ m_i / m_i \sim m_a \}.$$

Два различных класса эквивалентности $K(m_x)$ и $K(m_y)$ не пересекаются: $K(m_x) \cap K(m_y) = \varnothing$.

Представление множества M в виде попарно непересекающихся подмножеств $\{M_i\}$ будем называть *разбиением* этого множества:

$$\bigcup_i M_i = M,\ M_{i_a} \cap M_{i_b} = \varnothing,\ i_a \neq i_b.$$

Таким образом, классы эквивалентности образуют разбиение множества. Тестом распознавания отношения эквивалентности, заданного матрицей смежности, может быть приведение матрицы с помощью перестановки строк и столбцов к *клеточному виду*, когда около главной диагонали расположены подматрицы, состоящие из единиц, а остальные элементы матрицы равны нулю.

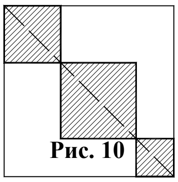


Рис. 10

На рис. 10 приведен пример клеточной матрицы, в которой подматрицы, состоящие из единиц, заштрихованы. Каждая заштрихованная подматрица соответствует классу эквивалентности. Следовательно, данная матрица представляет отношение эквивалентности с тремя классами эквивалентности.

Графы, представленные на рис. 7, *а*, *б*, *в*, задают отношения эквивалентности с тремя, двумя и одним классами соответственно.

Аналогично бинарному отношению определим *n-арное отношение*.

Декартово произведение n равных между собой множеств M называется *n-й степенью* M^n *множества M*. Под *n-арным отношением T* в множестве M понимается подмножество T его *n-й степени* $T \subset M^n$. Если элементы m_{i_1}, m_{i_2}, ..., m_{i_n} принадлежат множеству M, последовательность $(m_{i_1}, m_{i_2}, ..., m_{i_n})$ – множеству T, то говорят, что элементы m_{i_1}, m_{i_2}, ..., m_{i_n} находятся в отношении T. Любое n-арное отношение может быть задано перечислением элементов.

Рассмотрим свойство симметричности n-арных отношений, позволяющее эффективно использовать n-арные отношения при формализации практических задач. *Симметричным* называется n-арное отношение T в множестве M такое, что если последовательность $(m_{i_1}, m_{i_2}, ..., m_{i_n}) \in T$, то и любая последовательность $(m_{j_1}, m_{j_2}, ..., m_{j_n})$, полученная из $(m_{i_1}, m_{i_2}, ..., m_{i_n})$ перестановкой элементов, также принадлежит T.

По существу, n-арное отношение, обладающее свойством симметричности, задает подмножества, которые состоят из n элементов – подмножества мощности n. В дальнейшем n-арное отношение, обладающее свойством симметричности, будем называть *S-ричным отношением* или *S-отно-шением*. Элементы множества M, в котором определено S-отношение, будем называть *буквами*, а подмножества, определяемые S-отношением, – *словами*.

Однозначно задать S-отношение можно перечислением элементов, матрицей инцидентности, модельным графом (мографом), гиперграфом и двудольным графом.

Матрицей инцидентности $Q = [q_{ij}]$ называется двумерная матрица, j-му столбцу которой взаимно однозначно соответствует буква m_j, i-й строке – слово μ_i, определяемое S-отношением, и

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m_j \in \mu_i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Например, 3-отношение в множестве $M = \{а, и, о, р, с, ы\}$, определяющее слова $\mu_1 = \{с, о, р\}$, $\mu_2 = \{р, и, с\}$, $\mu_3 = \{с, ы, р\}$, $\mu_4 = \{о, с, а\}$, с помощью матрицы инцидентности Q можно задать следующим образом:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} а & и & о & р & с & ы \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Модельным графом (*мографом*) называется граф, в котором вершины соответствуют буквам и каждой букве (вершине) сопоставляется множество идентификаторов слов, в которые эта буква входит. Процесс сопоставления каждой букве множества идентификаторов слов будем называть *моделизацией* графа. Две вершины графа, имеющие хотя бы один общий идентификатор, называются *смежными* и соединяются *ребром* (неориентированной дугой).

Мограф, задающий 3-отношение в множестве $M = \{а, и, о, р, с, ы\}$, определяющее слова $\mu_1 = \{с, о, р\}$, $\mu_2 = \{р, и, с\}$, $\mu_3 = \{с, ы, р\}$, $\mu_4 = \{о, с, а\}$, изображен на рис. 11.

Для задания S-отношений используют также *гиперграф*. При этом буквы взаимно однозначно сопоставляют вершинам, слова – кругам Эйлера, которые охватывают буквы, входящие в соответствующие слова. Геометрическая интерпретация гиперграфа, определяющего заданное ранее 3-отношение в множестве $M = \{а, и, о, р, с, ы\}$, представлена на рис. 12.

Граф $G = \langle V, U\rangle$ называется *двудольным*, если его носитель разбит на два подмножества V^+, V^-, не имеющих общих вершин, и начало каждой дуги принадлежит подмножеству V^+ и только ему, а конец – подмножеству V^- и только ему.

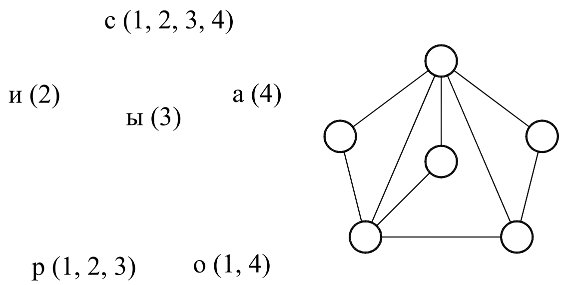


Рис. 11

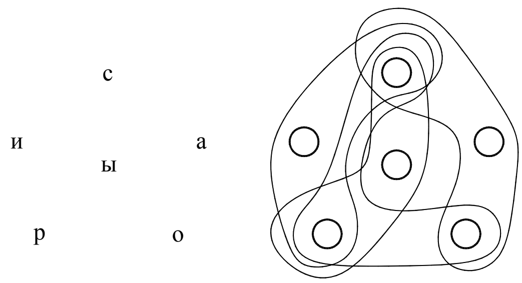


Рис. 12

При задании S-отношений с помощью двудольного графа элементам подмножества V^+ взаимно однозначно сопоставляют буквы, элементам подмножества V^- – идентификаторы слов, и дуга $(v_\alpha, v_\beta) \in U$ тогда и только тогда, когда буква, соответствующая вершине v_α, входит в слово, соответствующее вершине v_β. Двудольный граф, задающий 3-отношение $\{\{с, о, р\}, \{р, и, с\}, \{с, ы, р\}, \{о, с, а\}\}$ в множестве $\{а, и, о, р, с, ы\}$, изображен на рис. 13.

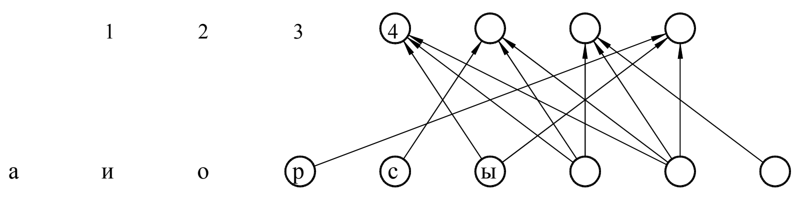


Рис. 13

Понятие модели является одним из основных в дискретной математике. *Моделью* Ψ называется совокупность множества M с заданными в нем отношениями S:

$$\Psi = \langle M, S \rangle,$$

где M – *носитель модели*, а $S = \{R_{11}, R_{12}, ..., R_{1n_1}, R_{21}, R_{22} \ldots, R_{2n_2}, ..., R_{m1}, R_{m2}, ..., R_{mn_m}\}$ – *сигнатура модели* ($R_{ia} \subset M^{i}$).

Задачи и уражнения

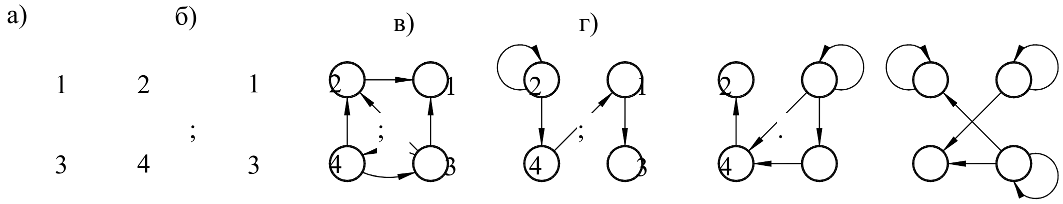
1 Представить перечислением элементов квадрат множества M:

а) $M = \{1, 2\}$; в) $M = \{3, 4\}$;
б) $M = \{a, b, c\}$; г) $M = \{d, e, f\}$.

2 Представить с помощью матрицы смежности бинарное отношение T в множестве $M = \{a, b, c, d\}$, заданное перечислением элементов:

а) $T = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (d, d)\}$;
б) $T = \{(a, c), (b, a), (b, d), (c, c), (c, d)\}$;
в) $T = \{(a, b), (b, a), (b, d), (c, a), (d, b), (d, c)\}$;
г) $T = \{(a, d), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$.

3 Представить перечислением элементов бинарное отношение T в множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$, заданное с помощью графа:



4 Представить с помощью фактор-множества M/T бинарное отношение T в множестве $M = \{a, b, c\}$, заданное перечислением элементов:
а) $T = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, a)\}$;
б) $T = \{(b, a), (c, a), (c, b), (c, c)\}$;
в) $T = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b)\}$;
г) $T = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c)\}$.

5 Установить, является ли рефлексивным, антирефлексивным или нерефлексивным бинарное отношение T в множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$:
а) $T = \{(1, 1), (2, 3), (4, 2), (4, 1), (4, 4)\}$;
б) $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
в) $T = \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$;
г) $T = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

6 Установить, является ли симметричным, антисимметричным или несимметричным бинарное отношение T в множестве $M = \{a, b, c, d\}$:
а) $T = \{(a, a), (b, c), (b, d), (c, b), (d, b)\}$;
б) $T = \{(a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (d, b)\}$;
в) $T = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, c)\}$;
г) $T = \{(b, a), (b, c), (c, a), (c, c), (d, a)\}$.

7 Установить, является ли транзитивным, антитранзитивным или нетранзитивным бинарное отношение T в множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$:
а) $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 3)\}$;
б) $T = \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 4)\}$;
в) $T = \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$;
г) $T = \{(1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$.

8 Задать с помощью графа бинарное отношение в множестве $M = \{a, b, c, d\}$, являющееся одновременно:

а) рефлексивным, симметричным и нетранзитивным;

б) антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным;

в) нерефлексивным, симметричным и антитранзитивным;

г) рефлексивным, антисимметричным и антитранзитивным;

д) антирефлексивным, несимметричным и нетранзитивным;

е) нерефлексивным, несимметричным и транзитивным;

ж) нерефлексивным, симметричным и транзитивным;

з) рефлексивным, несимметричным и нетранзитивным.

9 Определить, является ли заданное в множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$ бинарное отношение T бинарным отношением упорядоченности $\leq$:

а) $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;

б) $T = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$;

в) $T = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$;

г) $T = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 3), (4, 4)\}$;

д) $T = \{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

е) $T = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$;

ж) $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$;

з) $T = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$.

10 Установить, является ли заданное с помощью матрицы смежности бинарное отношение в множестве $M = \{a, b, c, d\}$ отношением строгой упорядоченности <:

а)

	a	*b*	*c*	*d*
a			1	
b				
c	1			1
d			1	

;

б)

	a	*b*	*c*	*d*
a				
b				
c		1		1
d		1		

;

в)

	a	*b*	*c*	*d*
a	1			
b				
c	1			
d	1		1	

;

г)

	a	*b*	*c*	*d*
a		1		
b				
c	1	1		1
d		1		

д)

	a	*b*	*c*	*d*
a				
b			1	1
c	1			1
d				

;

е)

	a	*b*	*c*	*d*
a			1	
b	1		1	1
c				
d	1		1	

;

ж)

	a	*b*	*c*	*d*
a				1
b				
c				
d				

;

з)

	a	*b*	*c*	*d*
a				
b			1	
c	1			
d		1		

11 Установить, является ли заданное с помощью матрицы смежности бинарное отношение в множестве $M = \{a, b, c, d\}$ отношением эквивалентности:

а)

	a	*b*	*c*	*d*
a	1	1		
b	1	1		
c			1	1
d			1	1

; б)

	a	*b*	*c*	*d*
a	1	1	1	
b		1	1	
c		1	1	
d				1

; в)

	a	*b*	*c*	*d*
a	1	1	1	
b	1	1		
c	1		1	
d				1

; г)

	a	*b*	*c*	*d*
a	1			
b		1	1	1
c		1	1	1
d		1	1	1

д)

	a	*b*	*c*	*d*
a	1			
b		1	1	

; е)

	a	*b*	*c*	*d*
a	1	1		1
b	1	1		1

; ж)

	a	*b*	*c*	*d*
a	1			1
b	1	1		

; з)

	a	*b*	*c*	*d*
a	1		1	
b		1		1

c		1	1	
d				1

c			1	
d	1	1		1

c		1	1	
d	1			1

c	1		1	
d		1		1

12 Определить число n классов эквивалентности и класс эквивалентности $K(a)$ элемента a в заданном в множестве $M = \{a, b, c, d\}$ бинарном отношении эквивалентности T:

а) $T = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$;

б) $T = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b), (d, d)\}$;

в) $T = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$;

г) $T = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$;

д) $T = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$;

е) $T = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}$;

ж) $T = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, c), (d, d)\}$;

з) $T = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c), (d, d)\}$.

13 Установить, является ли симметричным заданное 3-арное отношение T в множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

а) $T = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 3, 4), (4, 3, 2)\}$;

б) $T = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2)\}$;

в) $T = \{(2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2)\}$;

г) $T = \{(1, 3, 4), (1, 4, 3), (3, 1, 4), (3, 4, 1), (4, 1, 3), (4, 3, 1), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (2, 4, 1)\}$;

д) $T = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (1, 4, 2), (2, 4, 1)\}$;

е) $T = \{(3, 4, 1), (4, 1, 3), (1, 3, 4), (3, 1, 4), (4, 3, 1), (1, 4, 3)\}$;

ж) $T = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2)\}$;

з) $T = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$.

14 Представить с помощью модельного графа, гиперграфа и двудольного графа симметричное 3-арное отношение в множестве $M = \{a, b, c, d, e\}$, заданное матрицей инцидентности:

а) $$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array};$$

б) $$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array};$$

в) $$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array};$$

г) $$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array}.$$

4 БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ. МИНИМИЗАЦИЯ В КЛАССЕ ДНФ

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, принимающая одно из двух значений: 0 или 1 от n переменных, каждая из которых принимает одно из двух значений: 0 или 1, называется *булевой функцией от n переменных*.

Булеву функцию можно задать различными способами: табличным, дизъюнкцией конституент, гиперкубом и перечислением десятичных эквивалентов.

При табличном задании булевой функции от n переменных строят прямоугольную таблицу. Столбцам этой таблицы сопоставляют переменные функции и саму функцию, а в строках записывают всевозможные комбинации значений переменных (всего 2^n комбинаций) и соответствующие им значения функции. Например, с помощью табл. 2 задана булева функция от трех переменных.

Таблица 2

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0	0	0

0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

При задании булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, не равной 0, дизъюнкцией конституент используется разложение Шеннона:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n), \\ \text{на которых} \\ f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1}} \mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i},$$

где $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i}$ – конституента; $x_i^{\sigma_i}$ – первичный терм, определяемый выражением $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i & \text{при } \sigma_i = 1; \\ \bar{x}_i & \text{при } \sigma_i = 0; \end{cases}$ $\vee$ – операция дизъюнкция; & – операция конъюнкция; $^{-}$ – операция отрицание.

Операции дизъюнкция $\vee$, конъюнкция & и отрицание $^{-}$ заданы табл. 3, 4 и 5.

Таблица 3

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 4

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 5

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Приведем основные законы, которым удовлетворяют заданные операции:

– идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции

$$a \vee a = a, \quad a \& a = a;$$

– коммутативности дизъюнкции и конъюнкции

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \& b = b \& a;$$

– ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \quad a \& (b \& c) = (a \& b) \& c;$$

– дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции

$$a \& (b \vee c) = a \& b \vee a \& c, \quad a \vee (b \& c) = (a \vee b) \& (a \vee c);$$

– двойного отрицания

$$\bar{\bar{a}} = a;$$

– де-Моргана

$$\bar{a} \vee \bar{b} = \overline{a \& b}, \quad \bar{a} \& \bar{b} = \overline{a \vee b};$$

– склеивания

$$a \& b \vee a \& \bar{b} = a, \quad (a \vee b) \& (a \vee \bar{b}) = a;$$

– поглощения

$$a \vee a \& b = a, \quad a \& (a \vee b) = a;$$

– действий с константами 0 и 1

$$a \vee 0 = a, \quad a \& 0 = 0, \quad a \vee 1 = 1,$$

$$a \& 1 = a, \quad a \vee \bar{a} = 1, \quad a \& \bar{a} = 0.$$

Для рассматриваемого примера булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ задание в виде дизъюнкции конституент имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3 \vee x_1 \,\&\, \bar{x}_2 \,\&\, x_3 \vee x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \bar{x}_3 \vee x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3 .$$

Знак операции конъюнкция & обычно опускают:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

В дальнейшем представление булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в виде дизъюнкции конституент будем называть *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Количество первичных термов в представлении функции называется сложностью $L(f)$ представления. Сложность представления рассматриваемой булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ равна 12.

При задании булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с помощью гиперкуба строят граф, каждой вершине которого взаимно однозначно соответствует двоичный набор $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$; вершины упорядочивают по ярусам: в i-й ярус входят $\binom{n}{i}$ вершин, которым соответствуют двоичные наборы, содержащие i единиц; вершины соединяют ребром, если соответствующие им наборы отличаются в одном и только одном разряде; вершины, соответствующие наборам $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, при которых функция равна 1, заштриховываются.

Гиперкуб для булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$, совершенная ДНФ которой имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 ,$$

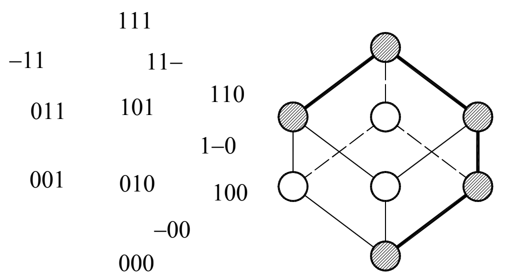
представлен на рис. 14.

Часто двоичные наборы задают десятичными эквивалентами $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sigma_i 2^{n-i}$, а булеву функцию – перечислением десятичных эквивалентов, соответствующих конституентам (конъюнкциям разложения Шеннона).

Булева функция, заданная выше совершенной ДНФ и гиперкубом, может быть представлена и перечислением десятичных эквивалентов:

$$f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee(0, 3, 4, 6, 7).$$

Минимальной ДНФ булевой функции называется ДНФ этой функции, имеющая минимальную сложность.



Рис

Рассмотрим метод Квайна (импликантных таблиц) для получения минимальной ДНФ булевой функции. Этот метод заключается в последовательном выполнении двух следующих этапов.

1 Выделение максимальных единичных интервалов.

Под *единичным интервалом* понимается множество интервалов, на которых булева функция принимает значение 1 и которые образуют гиперкуб некоторой размерности. Мощность интервала равна степени числа 2: 2^0 – вершина, 2^1 – ребро, 2^2 – грань и т.д.

Запишем множество единичных интервалов для рассматриваемого примера {000, 100, 110, 111, 011, –00, 1–0, 11–, –11}. Здесь и далее «–» означает, что переменная, соответствующая этому разряду, в конъюнкции отсутствует, т.е. по этой переменной после дизъюнкции соответствующих конъюнкций произошло склеивание. Так, интервал –00, соответствующий множеству конституент {000, 100}, получается в результате преобразования $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_2 \bar{x}_3$. Первые пять из выписанных выше интервалов соответствуют вершинам гиперкуба, а остальные – ребрам. Соответствующие вершины гиперкуба на рис. 14 заштрихованы, а ребра отмечены толстой линией.

Интервал I_α называется *максимальным интервалом* булевой функции, если не найдется другого интервала I_β этой функции, содержащего интервал I_α: $I_\alpha \not\subset I_\beta$.

Конъюнкция, соответствующая максимальному единичному интервалу булевой функции, называется *простой импликантой* этой функции.

Дизъюнкция простых импликант называется *сокращенной ДНФ* булевой функции.

При определении максимальных интервалов множество интервалов, соответствующих вершинам гиперкуба, разбивают на пояса, причем некоторый i-й пояс содержит интервалы, отвечающие наборам с i единицами в каждом. Тогда выделение максимальных интервалов сводится к попарному сравнению элементов только соседних поясов. Каждая пара элементов соседних поясов, отличающихся друг от друга только в одном разряде, образует новый интервал. Если построенные интервалы не являются максимальными, то процесс выделения максимальных интервалов продолжают.

Результаты выделения максимальных интервалов для рассматриваемого примера приведены на рис. 15.

000	–00
100	1–0
110	11–
011	–11
111	

В данном случае множество максимальных интервалов {–00, 1–0, 11–, –11} содержит четыре максимальных интервала, каждый из которых образует гиперкуб размерности 1 (ребро).

Сокращенная ДНФ рассматриваемой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид:

$$f_c(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3 .$$

Получением сокращенной ДНФ булевой функции заканчивается первый этап метода.

Тупиковой ДНФ булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется такая ДНФ этой функции, которая при вычеркивании хотя бы одного первичного терма не определяет f. Минимальная ДНФ булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является тупиковой.

Построение тупиковых ДНФ булевой функции сводится к покрытию столбцов строками в двумерной таблице. *Покрытием столбцов строками в двумерной таблице* называется такое множество строк, при котором для каждого столбца найдется хотя бы одна строка, на пересечении с которой этот столбец имеет единицу, причем при вычеркивании хотя бы одного элемента из этого множества строк указанное свойство не выполняется.

2 Построение и покрытие таблицы Квайна.

Таблица Квайна – двумерная таблица, каждой строке которой взаимно однозначно соответствует максимальный единичный интервал, столбцу – конституента, а на пересечении i-й строки и j-го столбца ставится единица, если j-я конституента входит в i-й интервал; в противном случае клетка (i, j) не заполняется или в ней ставится ноль. Для рассматриваемого примера таблица Квайна представлена табл. 6.

Таблица 6

	Максимальные единичные интервалы	Конституента				
		000	100	110	011	111
a	–00	1	1	0	0	0
b	1–0	0	1	1	0	0
c	11–	0	0	1	0	1
d	–11	0	0	0	1	1

Максимальный единичный интервал называется *обязательным*, если найдется конституента, принадлежащая ему и только ему. Множество обязательных интервалов образует *ядро покрытия*. В данном случае ядром покрытия является множество {–00, –11}, которое покрывает первый, второй, четвертый и пятый столбцы.

Минимальная ДНФ выбирается из тупиковых ДНФ, соответствующих покрытиям таблицы Квайна. Покрытия таблицы Квайна определяются путем преобразования некоторой мультипликативно-аддитивной формы в аддитивно-мультипликативную. В рассматриваемом примере обозначим строки таблицы Квайна соответственно буквами a, b, c и d. Для каждого j-го столбца запишем множество строк, покрывающих этот столбец:

$$j = 1 \to A_1 = \{a\}, \quad j = 2 \to A_1 = \{a, b\}, \quad j = 3 \to A_3 = \{b, c\},$$

$$j = 4 \to A_4 = \{d\}, \quad j = 5 \to A_5 = \{c, d\}.$$

Если каждое множество A_j представить в виде дизъюнкции ее элементов и найти конъюнкцию полученных дизъюнкций $\underset{j}{\&} A_j$, то каждая конъюнкция в полученной аддитивной форме будет соответствовать покрытию, а число всех покрытий будет равно числу различных конъюнкций в полученной аддитивно-мультипликативной форме:

$$\underset{j}{\&} A_j = a \,\&\, (a \vee b) \,\&\, (b \vee c) \,\&\, d \,\&\, (c \vee d) = a \,\&\, (b \vee c) \,\&\, d =$$
$$= (a \,\&\, b \vee a \,\&\, c) \,\&\, d = a \,\&\, b \,\&\, d \vee a \,\&\, c \,\&\, d.$$

Полученные конъюнкции $a \,\&\, b \,\&\, d$ и $a \,\&\, c \,\&\, d$ обозначают покрытия {–00, 1–0, –11} и {–00, 11–, –11}, соответствующие тупиковым ДНФ $f_{\text{т},1}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3$ и $f_{\text{т},2}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3$. В качестве минимальной ДНФ можно выбрать любую из этих двух тупиковых ДНФ, поскольку сложности их представления равны. Выберем, например, первую:

$$f_{\text{мин}}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 .$$

Таким образом, в результате упрощения сложность $L(f)$ представления булевой функции уменьшилась с 15 до 6.

Дальнейшее уменьшение сложности выражения, определяющего заданную функцию, возможно, если из класса ДНФ перейти в класс скобочных форм. Выражение, определяющее булеву функцию, называется *скобочной формой*, если кроме первичных термов и знаков операций конъюнкции и дизъюнкции в него входят скобки (,).

В рассматриваемом примере сложность представления функции, равная 6, понижается до 5 в результате применения закона дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции

$$f_{\text{СФ}}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3(\bar{x}_2 \vee x_1) \vee x_2x_3 .$$

Большое значение имеют *слабоопределенные булевы функции* $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые обладают следующими свойствами:

а) число переменных n велико;

б) мощность объединения единичной V_1 и нулевой V_0 областей намного меньше, чем 2^n, где единичную и нулевую области образуют вершины, в которых функция равна соответственно 1 и 0;

в) единичная и нулевая области задаются соответствующими интервалами.

Множество вершин гиперкуба, на которых функция равна нулю и которые образуют гиперкуб некоторой размерности, называется *нулевым интервалом*. Сокращенную ДНФ слабоопределенных функций строят с помощью таблицы различий.

Таблицей различий называется двумерная таблица размера $n \times |V_0|$, каждой строке которой взаимно однозначно соответствует разряд рассматриваемого единичного интервала, столбцу – нулевой интервал, а на пересечении i-й строки с j-м столбцом находится результат операции:

$$0 \oplus 0 = 0,\ 1 \oplus 0 = 1,\ - \oplus 0 = 0,$$
$$0 \oplus 1 = 1,\ 1 \oplus 1 = 0,\ - \oplus 1 = 0,$$
$$0 \oplus - = 0,\ 1 \oplus - = 0,\ - \oplus - = 0,$$

причем в качестве первого аргумента берется значение i-го разряда единичного интервала, в качестве второго – значение i-го разряда нулевого интервала, соответствующего j-му столбцу.

Выделение максимальных интервалов сводится к покрытию столбцов строками таблицы различий.

В качестве примера рассмотрим нахождение минимальной ДНФ булевой функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_7) = \begin{cases} 1 \text{ на интервалах } 0-0-0-0, 11-0-01, 0--001-; \\ 0 \text{ на интервалах } 10-0-01, 00--10-, 1101-0-. \end{cases}$$

Определим максимальные интервалы $I_{макс}$, содержащие единичный интервал 0 – 0 – 0 – 0, с помощью табл. 7 (таблицы различий), у которой строки идентифицированы буквами a, b, c, d, e, g, h.

Найдем все покрытия этой таблицы: $(a \vee h)\ ea = a\ (a \vee h)\ e = ae$. Имеем одно покрытие ae, соответствующее максимальному единичному интервалу $I_{макс\ 1}$ = 0 – – – 0 – – и простой импликанте $\bar{x}_1\bar{x}_5$.

Аналогично по табл. 8 и 9 определим множества максимальных интервалов, содержащих остальные единичные интервалы.

Таблица 7

	Единичный интервал	Нулевой интервал		
		10 – 0 – 01	00 – – 10 –	1101 – 0 –
a	0	1	0	1
b	–	0	0	0
c	0	0	0	0
d	–	0	0	0
e	0	0	1	0
g	–	0	0	0
h	0	1	0	0

Таблица 8

	Единичный интервал	Нулевой интервал		
		10 – 0 – 01	00 – – 10 –	1101 – 0 –
a	1	0	1	0
b	1	1	1	0
c	–	0	0	0
d	0	0	0	1
e	–	0	0	0
g	0	0	0	0
h	1	0	0	0

Найдем покрытия: $b\ (a \vee b)\ d = b\ (b \vee a)\ d = bd$. Единственному покрытию bd соответствует максимальный единичный интервал $I_{макс\ 2}$ = = – 1 – 0 – – – и простая импликанта $x_2\bar{x}_4$.

Таблица 9

	Единичный интервал	Нулевой интервал		
		10 – 0 – 01	00 – – 10 –	1101 – 0 –
a	0	1	0	1
b	–	0	0	0
c	–	0	0	0
d	0	0	0	1
e	0	0	1	0
g	1	1	1	1
h	–	0	0	0

Определим покрытия: $(a \vee g)\ (e \vee g)\ (a \vee d \vee g) = (a \vee g)\ (a \vee d \vee g)\ (e \vee g) = (a \vee g)\ (a \vee g \vee d)\ (e \vee g) = (a \vee g)\ (e \vee g) = ae \vee ag \vee ge \vee gg = ae \vee ag \vee ge \vee g = ae \vee g \vee ag \vee ge = ae \vee g \vee ge = ae \vee g$. Покрытиям ae и g соответствуют максимальные единичные интервалы $I_{макс\ 3}$ = 0 –

– – 0 – –,
$I_{\text{макс } 4}$ = – – – – – 1 – и простые импликанты $\bar{x}_1\bar{x}_5$, x_6.

Дизъюнкция простых импликант дает сокращенную ДНФ булевой функции, являющуюся уже полностью определенной:

$f_{\text{с}}(x_1, x_2, \ldots, x_7) = \bar{x}_1\bar{x}_5 \vee x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_5 \vee x_6 = \bar{x}_1\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_5 \vee x_2\bar{x}_4 \vee x_6 =$
$= \bar{x}_1\bar{x}_5 \vee x_2\bar{x}_4 \vee x_6$.

Единичная область функции $f_{\text{с}}$ содержит единичную область функции f, нулевая область функции $f_{\text{с}}$ содержит нулевую область функции f.

Выделение максимальных единичных интервалов и построение сокращенной ДНФ слабоопределенной булевой функции является первым этапом минимизации. Второй этап заключается в получении тупиковых ДНФ этой функции и выборе среди них минимальной ДНФ.

Тупиковой ДНФ слабоопределенной булевой функции называется ДНФ, не определяющая эту функцию с точностью до неопределенной области при вычеркивании хотя бы одного первичного терма. Тупиковые ДНФ булевой функции получаются в результате покрытия столбцов строками импликантной таблицы (таблицы Квайна) – двумерной таблицы, каждой строке которой соответствует максимальный единичный интервал, столбцу – единичный интервал, а на пересечении i-й строки с j-м столбцом находится единица, если j-й единичный интервал входит в i-й максимальный интервал, в противном случае – ноль.

Для рассматриваемого примера импликантная таблица имеет следующий вид.

Таблица 10

	Максимальные интервалы	Единичный интервал		
		0 – 0 – 0 – 0	11 – 0 – 01	0 – – 001 –
a	0 – – – 0 – –	1	0	1
b	– 1 – 0 – – –	0	1	0
c	– – – – – 1 –	0	0	1

Таблица имеет одно покрытие: $ab\,(a \vee c) = a\,(a \vee c)\,b = ab$. Этому покрытию соответствует множество максимальных единичных интервалов $\{I_{\text{макс}}\}$ = {0 – – – 0 – –, – 1 – 0 – – –} и единственная тупиковая ДНФ

$$f_{\text{т}}(x_1, x_2, \ldots, x_7) = \bar{x}_1\bar{x}_5 \vee x_2\bar{x}_4,$$

которая и является минимальной

$$f_{\text{мин}}(x_1, x_2, \ldots, x_7) = \bar{x}_1\bar{x}_5 \vee x_2\bar{x}_4.$$

Задачи и упражнения

1 Получить совершенную, сокращенную и минимальную ДНФ булевой функции, заданной перечислением десятичных эквивалентов:

а) $f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee(0, 4, 5, 7)$;
б) $f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee(0, 1, 3, 5, 7)$;
в) $f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee(0, 2, 3, 4, 5)$;
г) $f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee(0, 1, 4, 5, 6, 7)$;
д) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(6, 7, 8, 10, 14)$;
е) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(0, 1, 4, 5, 9, 11, 13, 15)$;
ж) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(5, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$;
з) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(0, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15)$.

2 Получить сокращенную и минимальную ДНФ слабоопределенной булевой функции, заданной перечислением единичных и нулевых интервалов:

а) $f(x_1, x_2, ..., x_5) = \begin{cases} 1 \text{ на интервалах } 1-011, -0011, 1101-; \\ 0 \text{ на интервалах } 01-00, 111-0, 00-10; \end{cases}$

б) $f(x_1, x_2, ..., x_6) = \begin{cases} 1 \text{ на интервалах } 01--11, 1-01-0, 11-0-1; \\ 0 \text{ на интервалах } -011-1, 01-0-0, 1-1-10; \end{cases}$

в) $f(x_1, x_2, ..., x_7) = \begin{cases} 1 \text{ на интервалах } 010010-, ---0011, 0-1---0; \\ 0 \text{ на интервалах } 1-0-1-0, 000000-, 1--0-00; \end{cases}$

г) $f(x_1, x_2, ..., x_7) = \begin{cases} 1 \text{ на интервалах } -011100, 00-001-, -1--1-0; \\ 0 \text{ на интервалах } 01111-1, 1001-01, -11-01-. \end{cases}$

5. ПОЛНОТА

Любую булеву функцию можно представить с помощью операций конъюнкция &, дизъюнкция $\vee$, отрицание $\bar{}$ и, быть может, скобок (,). Выясним, каким свойствам должны удовлетворять операции, с помощью которых можно выражать любую булеву функцию.

Рассмотрим алгебру вида $\langle M, \square \rangle$, где M – множество булевых функций и $\square(a, b, c, d) = \bar{a}\bar{d} \vee b\bar{c}$.

Установим, можно ли любую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ выразить в виде суперпозиции системы $S = \{\square\}$, как это возможно для случая системы $\{\vee, \&, \bar{}\}$.

Суперпозицией системы $S = \{\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_{k_1}), \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_{k_2}), ..., \varphi_l(x_1, x_2, ..., x_{k_l})\}$ называется любая функция f, полученная:

а) из $\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_{k_j})$ переименованием переменных, $\varphi_j \in S$;

б) подстановкой вместо некоторых переменных функции $\varphi_\alpha(x_1, x_2, ..., x_{k_\alpha})$ функций $\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_{k_j})$, $\varphi_\alpha, \varphi_j \in S$;

в) с помощью многократного применения п. а) и б).

Система S называется *полной* в k-значной логике P_k, если любая функция $f \in P_k$ представима в виде суперпозиции этой системы, и *базисом*, если теряется полнота S при удалении хотя бы одной функции.

Выразим дизъюнкцию и отрицание через $\square(a, b, c, d)$:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha} \vee 0 = \bar{\alpha}\,\bar{\alpha} \vee \alpha\bar{\alpha} = \square(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha);$$

$$\alpha \vee \beta = \overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\overline{\alpha}} \vee \beta\overline{\overline{\beta}} = \square(\bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) =$$

$$= \square(\square(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha), \beta, \square(\beta, \beta, \beta, \beta), \square(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)).$$

Тогда, согласно разложению Шеннона и закону де-Моргана, любую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно выразить в виде суперпозиции системы $S = \{\square\}$.

В общем случае для установления полноты системы S булевых функций f_i в P_2 используют критерий полноты Поста – Яблонского.

Определим предварительно пять классов булевых функций.

Классом K_0 *булевых функций* $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, *сохраняющих константу* 0, называется множество булевых функций вида

$$\{f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \,/\, f_i(0, 0, ..., 0) = 0\}.$$

Классом K_1 *булевых функций* $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, *сохраняющих константу* 1, называется множество булевых функций вида

$$\{f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \,/\, f_i(1, 1, ..., 1) = 1\}.$$

Определим принадлежность функции $\square(a, b, c, d) = \bar{a}\bar{d} \vee b\bar{c}$ к классам K_0 и K_1:

$$\square(0, 0, 0, 0) = \bar{0}\bar{0} \vee 0\bar{0} = 1 \vee 0 = 1,\ \square(a, b, c, d) \notin K_0,$$

$$\square(1, 1, 1, 1) = \bar{1}\,\bar{1} \vee 1\bar{1} = 0 \vee 0 = 0,\ \square(a, b, c, d) \notin K_1.$$

Классом $K_л$ *линейных булевых функций* $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется множество булевых функций вида

$$\{f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \,/\, f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 \oplus \sum c_j x_j\},$$

$$c_0,\ c_j = 0,\ 1;\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n;$$

где $\oplus$, $\sum$ – знаки операции «сложение по модулю два»: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$.

Установим, является ли булева функция □ (a, b, c, d) линейной.

Предположим, что она представима в виде

$$□\ (a, b, c, d) = c_0 \oplus c_a a \oplus c_b b \oplus c_c c \oplus c_d d,$$

т.е. является линейной.

Исходя из этого предположения, найдем неизвестные коэффициенты c_0, c_a, c_b, c_c, c_d. Для определения коэффициента c_0 зафиксируем набор 0000:

$$□\ (0, 0, 0, 0) = \overline{0}\,\overline{0} \vee 0\overline{0} = 1 \vee 0 = 1,$$

$$□\ (0, 0, 0, 0) = c_0 \oplus c_a 0 \oplus c_b 0 \oplus c_c 0 \oplus c_d 0 = c_0 = 1.$$

Аналогично найдем коэффициенты c_a, c_b, c_c, c_d, фиксируя соответственно наборы 1000, 0100, 0010, 0001:

$$□\ (1, 0, 0, 0) = \overline{1}\,\overline{0} \vee 0\overline{0} = 0 \vee 0 = 0,$$
$$□\ (1, 0, 0, 0) = 1 \oplus c_a 1 \oplus c_b 0 \oplus c_c 0 \oplus c_d 0 = 1 \oplus c_a = 0 \rightarrow c_a = 1;$$

$$□\ (0, 1, 0, 0) = \overline{0}\,\overline{0} \vee 1\overline{0} = 1 \vee 1 = 1,$$

$$□\ (0, 1, 0, 0) = 1 \oplus 1\&0 \oplus c_b 1 \oplus c_c 0 \oplus c_d 0 = 1 \oplus c_b = 1 \rightarrow c_b = 0;$$

$$□\ (0, 0, 1, 0) = \overline{0}\,\overline{0} \vee 0\overline{1} = 1 \vee 0 = 1,$$

$$□\ (0, 0, 1, 0) = 1 \oplus 1\&0 \oplus 0\&0 \oplus c_c 1 \oplus c_d 0 = 1 \oplus c_c = 1 \rightarrow c_c = 0;$$

$$□\ (0, 0, 0, 1) = \overline{0}\,\overline{1} \vee 0\overline{0} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$□\ (0, 0, 0, 1) = 1 \oplus 1\&0 \oplus 0\&0 \oplus 0\&0 \oplus c_d 1 = 1 \oplus c_d = 0 \rightarrow c_d = 1.$$

Таким образом, □ $(a, b, c, d) = 1 \oplus a \oplus d$.

Сравним значения представлений $\overline{a}\,\overline{d} \vee b\overline{c}$ и $1 \oplus a \oplus d$ функции □ (a, b, c, d) на остальных наборах. Например, на наборе 1111 имеем:

$$□\ (1, 1, 1, 1) = \overline{1}\,\overline{1} \vee 1\overline{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$□\ (1, 1, 1, 1) = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$$

Следовательно, сделанное ранее предположение о линейности функции □ (a, b, c, d) является неверным: □ $(a, b, c, d) \notin K_{\text{л}}$.

Классом $K_{\text{с}}$ *самодвойственных булевых функций* $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется множество булевых функций вида

$$\{ f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \,/\, f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \bar{f}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \}.$$

Следовательно, функция является самодвойственной, если на любой паре противоположных наборов функция принимает противоположные значения.

Проверим, является ли булева функция □ (a, b, c, d) самодвойственной. Для этого представим функцию табл. 11.

Таблица 11

a	b	c	d	□ $(a, b, c,$	a	b	c	d	□ $(a, b, c,$

				d)					d)
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0

Функция □ (a, b, c, d) не является самодвойственной уже хотя бы потому, что □ (0, 0, 0, 1) = □ (1, 1, 1, 0): □ (a, b, c, d) $\notin K_с$.

Классом $K_м$ *монотонных булевых функций* $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется множество булевых функций вида

$$\{ f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \,/\, (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*) \geq (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \leftrightarrow (\sigma_i^* \geq \sigma_i,$$
$$i = 1, 2, ..., n) \rightarrow f_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*) \geq f_i(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \}.$$

Для тестирования функции □ (a, b, c, d) на монотонность можно проанализировать распределение значений функции в соответствующем ей гиперкубе, представленном на рис. 16.

Если в гиперкубе булевой функции найдется хотя бы одно ребро, концам которого сопоставлены двоичные наборы $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*)$ и $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ такие, что $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*) \geq (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ и $f_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*) < < f_i(\sigma_1, \sigma_1, …, \sigma_n)$, то такая функция не является монотонной. Рассматриваемая булева функция □ (a, b, c, d) немонотонная, поскольку:

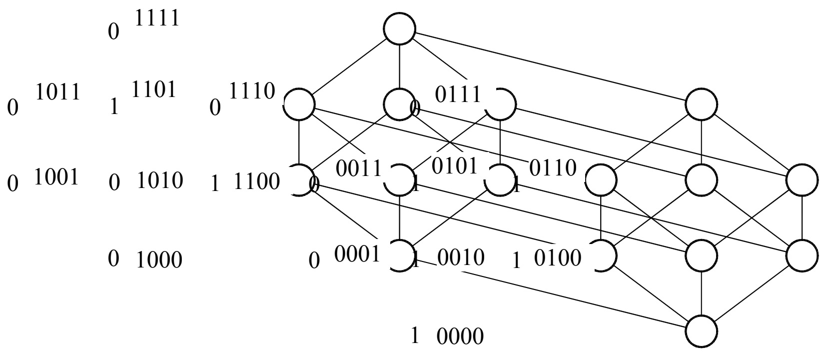
$$(1, 0, 0, 0) \geq (0, 0, 0, 0),$$

□ (1, 0, 0, 0) < □ (0, 0, 0, 0).

Приведем критерий полноты. *Система S булевых функций* f_i *является полной* тогда и только тогда, когда она содержит: функцию, не сохраняющую константу 0; функцию, не сохраняющую константу 1; нелинейную функцию; несамодвойственную функцию и немонотонную функцию.

Используя этот критерий и метод Петрика, получим возможные базисы в двузначной логике P_2 с нуль-, одно- и двуместными операциями.

Все булевы функции от двух переменных заданы табл. 12.



Рис

Таблица 12

Пере-мен-ные	Булевы функции

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Представим эти булевы функции аналитически и дадим им названия.

Функция $f_0(x_1, x_2) = 0$ – *константа нуль*.

Функция $f_1(x_1, x_2) = x_1x_2$ – *конъюнкция*.

Функция $f_2(x_1, x_2) = x_1\bar{x}_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee x_2} = \overline{x_1 \to x_2} = x_1 \mapsto x_2$ – *левая коимпликация* (читается «*не если* x_1, *то* x_2», приставка «*ко*» в слове коимпликация от лат. *conversus* – обратный).

Функция $f_3(x_1, x_2) = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = x_1$.

Функция $f_4(x_1, x_2) = \bar{x}_1x_2 = \overline{x_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{x_1 \leftarrow x_2} = x_1 \lrcorner\, x_2$ – *правая коимпликация*.

Функция $f_5(x_1, x_2) = \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2 = x_2$.

Функция $f_6(x_1, x_2) = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = x_1 \oplus x_2$ – *сложение по модулю два* или функция *неравнозначности*, *неэквивалентности*.

Функция $f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – *дизъюнкция*.

Функция $f_8(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \circ x_2$ – *функция Вебба*.

Функция $f_9(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = x_1 \sim x_2$ – *эквивалентность*, *равнозначность*.

Функция $f_{10}(x_1, x_2) = \bar{x}_2$ – *отрицание*.

Функция $f_{11}(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = \bar{x}_2 \vee x_1 = x_1 \leftarrow x_2$ – *правая импликация* (читается «*если* x_2, *то* x_1»).

Функция $f_{12}(x_1, x_2) = \bar{x}_1$ – *отрицание*.

Функция $f_{13}(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 \to x_2$ – *левая импликация* (читается «*если* x_1, *то* x_2»).

Функция $f_{14}(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = x_1 \mid x_2$ – *функция Шеффера*.

Функция $f_{15}(x_1, x_2) = 1$ – *константа единица*.

Для получения всех базисов в P_2 построим двумерную таблицу (табл. 13), каждой строке которой взаимно однозначно сопоставим одну из выбранных одиннадцати функций, столбцу – один из классов K_0, K_1, $K_л$, $K_с$, $K_м$. В клетку (i, j) таблицы ставим 1, если i-я функция не принадлежит j-му классу, и ставим 0 в противном случае. Функции $f_3, f_4, f_5, f_{10}, f_{11}$ в таблице не представлены, поскольку в строках f_3, f_5 были бы проставлены все нули, а строки f_4, f_{10}, f_{11} повторили бы строки f_2, f_{12}, f_{13} соответственно).

Таблица 13

	Функция	Класс				
		K_0	K_1	$K_л$	$K_с$	$K_м$
a	f_0	0	1	0	1	0
b	f_1	0	0	1	1	0
c	f_2	0	1	1	1	1
d	f_6	0	1	0	1	1
e	f_7	0	0	1	1	0
g	f_8	1	1	1	1	1
k	f_9	1	0	0	1	1
m	f_{12}	1	1	0	0	1
n	f_{13}	1	0	1	1	1
p	f_{14}	1	1	1	1	1
r	f_{15}	1	0	0	1	0

Используя метод Петрика, составим мультипликативную-аддитивную форму, преобразуем ее в аддитивно-мультипликативную и получим все покрытия столбцов строками этой таблицы:

$$(g \vee k \vee m \vee n \vee p \vee r)\,(a \vee c \vee d \vee g \vee m \vee p)\,(b \vee c \vee e \vee g \vee n \vee p)\&$$
$$\&(a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee g \vee k \vee n \vee p \vee r)\,(c \vee d \vee g \vee k \vee m \vee n \vee p) =$$
$$= (g \vee ak \vee kc \vee kd \vee m \vee an \vee cn \vee dn \vee p \vee ar \vee cr \vee rd)\&$$
$$\&(b \vee c \vee e \vee g \vee n \vee p)\,(c \vee d \vee g \vee k \vee m \vee n \vee p) =$$
$$= (g \vee ak \vee kc \vee kd \vee m \vee an \vee cn \vee dn \vee p \vee ar \vee cr \vee rd)\&$$
$$\&(c \vee g \vee n \vee p \vee bd \vee bk \vee bm \vee ed \vee ek \vee em) =$$
$$= g \vee p \vee abk \vee kc \vee an \vee cn \vee dn \vee ake \vee kbd \vee ked \vee$$
$$\vee\, mc \vee mn \vee bm \vee me \vee cr \vee rbd \vee red =$$
$$= g \vee p \vee kc \vee an \vee cn \vee dn \vee mc \vee mn \vee bm \vee me \vee$$
$$\vee\, cr \vee abk \vee ake \vee kbd \vee ked \vee rbd \vee red.$$

Каждое из полученных покрытий π_i порождает базис B_i:

$\pi_1 = \{g\} \leftrightarrow B_1 = \{\circ\}$ – *базис Вебба*;
$\pi_2 = \{p\} \leftrightarrow B_2 = \{|\}$ – *базис Шеффера*;
$\pi_3 = \{k, c\} \leftrightarrow B_3 = \{\mapsto, \sim\}$;
$\pi_4 = \{a, n\} \leftrightarrow B_4 = \{\rightarrow, 0\}$ – *импликативный базис*;
$\pi_5 = \{c, n\} \leftrightarrow B_5 = \{\rightarrow, \lrcorner\}$;
$\pi_6 = \{d, n\} \leftrightarrow B_6 = \{\rightarrow, \oplus\}$;
$\pi_7 = \{m, c\} \leftrightarrow B_7 = \{\mapsto, \bar{\ }\}$ – *коимпликативный базис*;
$\pi_8 = \{m, n\} \leftrightarrow B_8 = \{\rightarrow, \bar{\ }\}$ – *импликативный базис*;
$\pi_9 = \{b, m\} \leftrightarrow B_9 = \{\&, \bar{\ }\}$ – *конъюнктивный базис Буля*;
$\pi_{10} = \{m, e\} \leftrightarrow B_{10} = \{\vee, \bar{\ }\}$ – *дизъюнктивный базис Буля*;
$\pi_{11} = \{c, r\} \leftrightarrow B_{11} = \{\mapsto, 1\}$ – *коимпликативный базис*;
$\pi_{12} = \{a, b, k\} \leftrightarrow B_{12} = \{\sim, \&, 0\}$;
$\pi_{13} = \{a, k, e\} \leftrightarrow B_{13} = \{\sim, \vee, 0\}$;
$\pi_{14} = \{k, b, d\} \leftrightarrow B_{14} = \{\oplus, \&, \sim\}$;
$\pi_{15} = \{k, e, d\} \leftrightarrow B_{15} = \{\oplus, \vee, \sim\}$;
$\pi_{16} = \{r, b, d\} \leftrightarrow B_{16} = \{\oplus, \&, 1\}$ – *базис Жегалкина*;
$\pi_{17} = \{r, e, d\} \leftrightarrow B_{17} = \{\oplus, \vee, 1\}$.

Получено семнадцать базисов, в каждом из которых нельзя вычеркнуть ни одну функцию без потери полноты в двузначной логике.

Каждой булевой функции, представленной в системе функций $\{\vee, \&, \bar{\ }\}$, соответствует эквивалентное представление в любом из полученных базисов.

Техническая реализация булевых функций, вошедших в базисы, может быть основана на использовании различных физических явлений. Так, например, магнитные явления используются для реализации импликации и коимпликации, явления в полупроводниках – для реализации функций Шеффера и Вебба.

Задачи и упражнения

1 Установить, сохраняет ли константы 0 и 1, является ли линейной, самодвойственной и монотонной булева функция:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_3$;
б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_1 x_3$;
в) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3$;
г) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_3$;
д) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3$;
е) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$.

2 Определить, является ли полной система S булевых функций трех переменных и образует ли она базис в двузначной логике:

а) $S = \{x_1, x_1 x_2 \vee \bar{x}_3, x_2 \vee x_3\}$; г) $S = \{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1, \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3\}$;

б) $S = \{ x_1\bar{x}_2,\ \bar{x}_2 \}$; д) $S = \{ x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,\ x_1x_2 \vee x_2x_3 \}$;

в) $S = \{ x_1x_3,\ x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3,\ \bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \}$; е) $S = \{ \bar{x}_2 \vee x_3,\ x_1x_2x_3,\ \bar{x}_1 \}$.

6 ВЗВЕШЕННЫЙ ГРАФ И ЕГО МАТРИЧНОЕ ЗАДАНИЕ

Выше понятие графа было определено как совокупность $\langle V, U\rangle$ множества вершин V и дуг $U \subset V^2$. Дуга u, соединенная с вершиной v, называется *инцидентной вершине* v, а вершина v – коинцидентной дуге u. В дуге (v_i, v_j) вершины v_i и v_j называются *граничными*, причем v_i – *начало*, v_j – *конец дуги*.

При удалении дуг из графа $G = \langle V, U\rangle$ получаем *частичный граф* $G' \subset G$, $G' = \langle V, U'\rangle$, $U' \subset U$ графа G, при удалении вершин и инцидентных им дуг – *подграф* $G'' = \langle V'', U''\rangle$, $V'' \subset V$, $U'' \subset U$ графа G, при дальнейшем удалении дуг из подграфа G'' графа G - *частичный подграф* $\tilde{G} = \langle V'', \tilde{U}\rangle$, $\tilde{U} \subset U''$ графа G.

Две дуги u_α и u_β называются *смежными*, если они инцидентны одной и той же вершине. Две вершины v_a и v_b называются *смежными*, если они соединены дугой.

Используя понятие окрестности единичного радиуса вершины v_α, обозначаемой $O(v_\alpha)$ или Γv_α, граф определяют как совокупность множества вершин и множества окрестностей этих вершин: $G = \langle V, \Gamma\rangle$.

Определим понятие взвешенного графа. Сопоставим каждой вершине $v_i \in V$, $V = \{v_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ графа $G = \langle V, U\rangle$ вес w_j из множества весов $W = \{w_j \mid j = 1, 2, ..., m\}$. В результате получим множество *взвешенных вершин*, при этом необязательно, чтобы веса различных вершин были различными. Сопоставим каждой дуге $u_i \in U$, $U = \{u_i \mid i = 1, 2, ..., k\}$ графа $G = \langle V, U\rangle$ вес p_j из множества весов $P = \{p_j \mid j = 1, 2, ..., l\}$. В результате получим множество *взвешенных дуг*, при этом необязательно, чтобы веса различных дуг были различными.

Определенные выше множества взвешенных вершин и взвешенных дуг определяют в совокупности *взвешенный граф* $G = \langle (V, W), (U, P)\rangle$.

Для задания графов существует несколько классов матриц, основными из которых являются класс матриц инциденций и класс матриц смежности. Рассмотрим эти классы матриц.

Класс матриц инциденций. Если граф G содержит n вершин и m дуг, то матрица инциденций $A(G) = [a_{ij}]_{m \times n}$ определяется как

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_j \text{ – начало дуги } u_i; \\ -1, \text{ если вершина } v_j \text{ – конец дуги } u_i; \\ 0, \text{ если вершина } v_j \text{ не коинцидентна дуге } u_i. \end{cases}$$

Иногда граф содержит петли, т.е. дуги вида (v_i, v_i). В этом случае некоторые элементы матрицы A одновременно должны быть равны и 1, и –1, что приводит к неоднозначности элементов матрицы A.

Для задания графа с петлями «расщепим» матрицу A на две матрицы: матрицу $A^+ = [\,a^+_{ij}\,]_{m \times n}$, где

$$a^+_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_j \text{ – начало дуги } u_i; \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

и матрицу $A^- = [\,a^-_{ij}\,]_{m \times n}$, где

$$a^-_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_j \text{ – конец дуги } u_i; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Если граф без петель, то $A = A^+ - A^-$. Матрицы A^+ и A^- описывают граф без учета весов вершин и дуг.

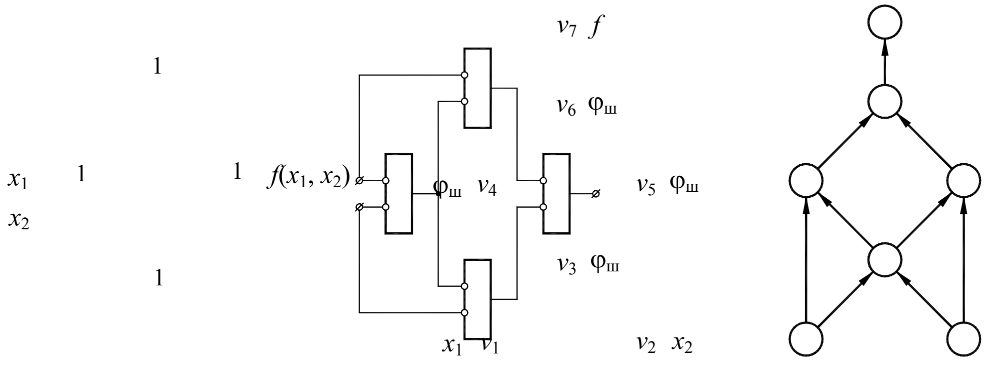
Зададим веса вершин графа G в виде столбцовой матрицы

$$W(G)=\begin{Vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{Vmatrix},$$

а веса дуг – в виде диагональной матрицы порядка m

$$P(G)=\begin{Vmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_m \end{Vmatrix}.$$

Матрицы A^+, A^-, W, P полностью описывают взвешенный граф.



а) *б*)

Рис. 17

Рассмотрим логическую схему (рис. 17, *а*), реализующую функцию $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ сложения по модулю два в базисе Шеффера $B = \{|\}$, состоящем из одноименной функции $\varphi_ш(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$. Логическая схема имеет четыре базисных элемента, каждый из которых обозначает функцию $\varphi_ш$ Шеффера и графически изображен в виде прямоугольника. Соответствующий этой схеме взвешенный граф $G = \langle (V, W), U\rangle$ представлен на рис. 17, *б*. Вершины v_1, v_2 графа взвешены переменными x_1, x_2 соответственно; вершины v_i, i = 3, 4, 5, 6 – функциональной переменной $\varphi_ш$; вершина v_7 – функциональной переменной f. Этот взвешенный граф задается матрицами рассмотренного класса следующим образом:

$$A(G)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad W(G)=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi_ш \\ \varphi_ш \\ \varphi_ш \\ \varphi_ш \\ f \end{Vmatrix}.$$

Класс матриц смежности. Элемент s_{ij} матрицы смежности $S = [s_{ij}]_{n \times n}$ графа с невзвешенными дугами определяется следующим образом:

$$s_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ если } (v_i, v_j) \in U; \\ 0, \text{ если } (v_i, v_j) \notin U. \end{cases}$$

Для графа с взвешенными дугами:

$$s_{ij}=\begin{cases} p_{ij}, \text{ если дуга } (v_i, v_j) \in U \text{ имеет вес } p_{ij}; \\ 0, \text{ если } (v_i, v_j) \notin U. \end{cases}$$

Матрицы S, W полностью описывают взвешенный граф. Например, граф G (рис. 17, *б*) задается матрицами этого класса как

$$S(G) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad W(G) = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi_{\text{ш}} \\ \varphi_{\text{ш}} \\ \varphi_{\text{ш}} \\ \varphi_{\text{ш}} \\ f \end{Vmatrix}.$$

Все ненулевые элементы матрицы S равны 1, так как дуги этого графа не взвешены.

Два графа $G = \langle V, U\rangle$ и $G' = \langle V', U'\rangle$ называются *изоморфными*, если существует такое взаимно-однозначное соответствие между их вершинами V и V', что вершины v_a, v_b соединены дугой (v_a, v_b) в первом графе в том и только в том случае, когда соответствующие им вершины v'_a, v'_b соединены дугой (v'_a, v'_b) во втором графе. Матрицы рассмотренных классов задают графы с точностью до изоморфизма.

Обозначим через $(A^+)^{\text{т}}$ транспонированную матрицу инциденций A^+. Матрица смежности, начальная A^+ и конечная A^- матрицы инциденций, а также диагональная матрица весов дуг связаны следующим равенством:

$$S = (A^+)^{\text{т}} \cdot P \cdot (A^-).$$

С помощью матриц смежности можно задавать и неориентированные графы. Так, граф (рис. 17, *б*) без учета весов его вершин и ориентации дуг полностью описывает матрица

$$S(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}.$$

Большие неориентированные графы, матрицы смежности которых слабо заполнены единицами, можно задавать более эффективно в смысле затрачиваемого объема информации, используя при этом понятие мографа.

При этом связному неориентированному графу $G = \langle V, U\rangle$ без петель сопоставляется модель $\Psi = <M, S_1, S_2, \ldots, S_n>$ с носителем $M = V$. Слово, определяемое отношением S_i, состоит из i букв: окрестности единичного радиуса $O(v_\alpha)$, $v_\alpha \in V$ мощности $(i - 1)$ и самой вершины v_α.

Матрица инцидентности $Q(\psi)$ модели ψ в этом случае представляет собой матрицу смежности $S(G)$ графа G, в которой любой из элементов главной диагонали равен 1:

$$Q(\psi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}.$$

Минимизация затрачиваемого количества информации при задании графа сводится к покрытию столбцов строками матрицы $Q(\psi)$. Для уменьшения трудоемкости поиска минимального покрытия необходимо вычеркнуть поглощаемые строки и столбцы. *Строка* α *поглощает строку* β, если множество столбцов M_α, покрываемых строкой α, содержит множество столбцов M_β, покрываемых строкой β, $M_\beta \subset M_\alpha$. *Столбец a поглощает столбец b*, если множество строк M_b, покрывающих столбец b, содержит множество строк M_a, покрывающих столбец a, $M_a \subset M_b$.

Строка v_3 матрицы $Q(\psi)$ поглощает строки v_1 и v_2, строка v_6 – строку v_7. Столбец v_7 поглощает столбцы v_4, v_5 и v_6, столбец v_1 – столбец v_3. Вычеркнем из матрицы $Q(\psi)$ строки v_1, v_2, v_7 и столбцы v_3, v_4, v_5, v_6:

$$Q'(\psi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_7 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} .$$

Найдем покрытия столбцов строками матрицы $Q'(\psi)$:

$$(v_3 \vee v_4)\,(v_3 \vee v_5)\,v_6 = (v_3\,(v_3 \vee v_5) \vee v_4\,(v_3 \vee v_5))\,v_6 =$$
$$= (v_3 \vee v_4\,(v_3 \vee v_5))\,v_6 = (v_3 \vee v_4\,v_3 \vee v_4\,v_5)\,v_6 = (v_3 \vee v_4\,v_5)\,v_6 =$$
$$= v_3\,v_6 \vee v_4\,v_5\,v_6.$$

Минимальным из двух полученных покрытий матрицы $Q'(\psi)$ и матрицы $Q(\psi)$ является покрытие $\{v_3, v_6\}$. Это покрытие порождает две окрестности единичного радиуса: $O(v_3) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ и $O(v_6) = \{v_4, v_5, v_7\}$.

Заменим в матрице $Q(\psi)$ нулями недиагональные единичные элементы, вошедшие в покрытие, и исключим затем из нее строки и столбцы, не содержащие недиагональных единичных элементов:

$$Q''(\psi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} .$$

Найдем покрытия столбцов строками матрицы $Q''(\psi)$:

$$(v_1 \vee v_4)\,(v_2 \vee v_5)\,(v_1 \vee v_4)\,(v_2 \vee v_5) = (v_1 \vee v_4)\,(v_2 \vee v_5) =$$
$$= v_1\,(v_2 \vee v_5) \vee v_4\,(v_2 \vee v_5) = v_1\,v_2 \vee v_1\,v_5 \vee v_2\,v_4 \vee v_4\,v_5.$$

Поскольку все четыре полученные покрытия имеют одинаковую сложность, в качестве минимального покрытия можно выбрать любое из них.

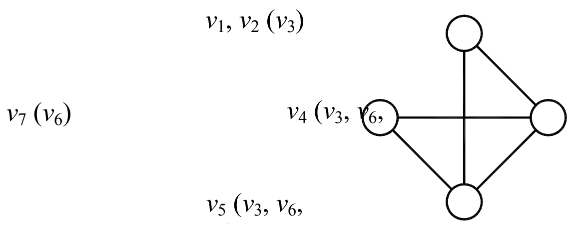


Рис. 18

Заменив в матрице $Q''(\psi)$ нулями недиагональные единичные элементы, вошедшие в покрытие, и исключив затем из нее строки и столбцы, не содержащие недиагональных единичных элементов, получим пустую матрицу, что свидетельствует об окончании процесса минимизации затрачиваемого количества информации при задании графа.

Сформируем матрицу инцидентности $\widetilde{Q}(\psi)$ модели ψ, задающую рассматриваемый граф. Строкам этой матрицы взаимно однозначно сопоставим элементы найденных покрытий, а столбцам – элементы объединения окрестностей элементов первого покрытия:

$$\widetilde{Q}(\psi) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc|c} v_1 & v_2 & v_4 & v_5 & v_7 & \\ \end{array}$$

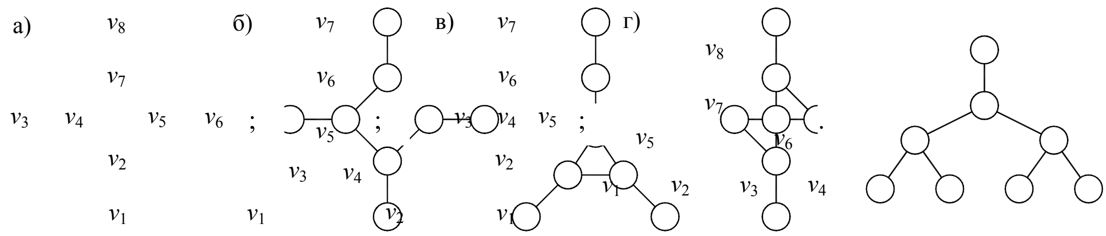
$$\widetilde{Q}(\psi) = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} v_3 \\ v_6 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} .$$

Для задания этой матрицы необходимо 20 бит вместо 49 бит при задании этого графа матрицей инцидентности $Q(\psi)$. Мограф $G^M(\widetilde{Q}(\psi))$ изображен на рис. 18. Вершинам мографа сопоставлены элементы объединения окрестностей. Одна из вершин имеет двойное обозначение v_1, v_2, поскольку столбцы v_1 и v_2 матрицы $\widetilde{Q}(\psi)$ идентичны.

Уплотнение задания ориентированных графов с петлями аналогично описанному способу. При этом отдельно задаются начала дуг графа в виде мографа $(G^M)^+$ и концы дуг в виде $(G^M)^-$.

Задачи и упражнения

1 Получить матрицу инцидентности $\widetilde{Q}(\psi)$ модели ψ, минимизирующую затрачиваемое количество информации при задании неориентированного графа:



7 СВЯЗНОСТЬ И СИЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

Распределение цепей и циклов в неориентированном графе, а также путей и контуров в ориентированном графе определяет многие свойства графа, в том числе его связность и сильную связность.

Цепью в неориентированном графе называется последовательность ребер $(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)$ вида $\rho_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, $i = 1, 2, ..., n$. Вершины цепи могут иметь степень, равную 1. Вершина со степенью, равной 1, называется *концевой вершиной*. Число ребер цепи, соединяющей вершины v_i и v_j, называется *длиной цепи* и обозначается $l(v_i, v_j)$. Цепь называется *составной*, если в ней повторяется хотя бы одно ребро, *сложной*, если – хотя бы одна вершина, и *простой* – в противном случае.

Циклом называется цепь, концевые вершины которой совпадают. Любая вершина v_i цикла имеет степень $s(v_i) \geq 2$.

Граф $G = \langle V, U\rangle$ называется *связным*, если любая пара его вершин соединена цепью.

Максимальный по включению вершин связный подграф графа называется его *компонентой связности*. Граф называется *несвязным*, если он имеет число компонент связности больше одной. Например, граф, состоящий из двух несмежных вершин, имеет две компоненты связности и является несвязным.

Рассмотрим задачу определения числа компонент связности неориентированного графа.

Пусть $S = [s_{ij}]$ – матрица смежности графа $G = \langle V, U\rangle$, элемент s_{ij} которой определяется следующим образом:

$$s_{ij} = \begin{cases} \text{идентификатор ребра, соединяющего вершины } v_i, v_j; \\ 0, \text{ если вершины } v_i, v_j \text{ не смежны.} \end{cases}$$

Под умножением двух ненулевых элементов матриц понимается конкатенация – соединение соответствующих строк символов. Сложение элементов матриц понимается как объединение соответствующих строк.

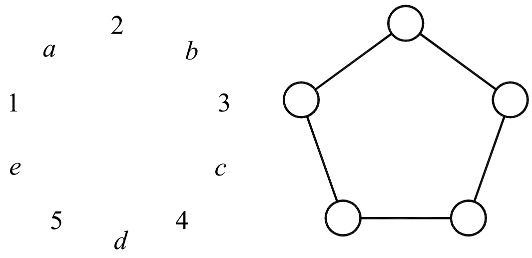


Рис. 19

Тогда элемент (i, j) матрицы S^n будет представлять собой множество цепей длины n, соединяющих вершины v_i, v_j.

Рассмотрим распределение цепей в неориентированном графе, представленном на рис. 19.

Матрица смежности этого графа имеет вид:

$S =$

	1	2	3	4	5	
		a			*e*	1
	a		*b*			2
		b		*c*		3
			c		*d*	4
	e			*d*		5

Матрица смежности S определяет распределение ребер (цепей единичной длины). Для определения цепей длины 2 возведем эту матрицу в квадрат:

$S^2 =$

	1	2	3	4	5	
	aa ee		*ab*	*ed*		1
		aa bb		*bc*	*ae*	2
	ba		*bb cc*		*cd*	3
	de	*cb*		*cc dd*		4
		ea	*dc*		*ee dd*	5

Суммируя матрицы S и S^2, получим:

$S + S^2 =$

	1	2	3	4	5	
	aa ee	*a*	*ab*	*ed*	*e*	1
	a	*aa bb*	*b*	*bc*	*ae*	2
	ba	*b*	*bb cc*	*c*	*cd*	3
	de	*cb*	*c*	*cc dd*	*d*	4
	e	*ea*	*dc*	*d*	*ee dd*	5

В матрице $S + S^2$ отсутствуют нулевые элементы, что означает существование цепи длины 1 или 2 между любой парой вершин графа. Следовательно, рассматриваемый граф имеет одну компоненту связности, т.е. является связным.

Понятие цепи используется при изучении метрических свойств графа.

Минимальная длина цепи, соединяющей вершины v_i и v_j, называется *расстоянием* $r(v_i, v_j)$ между вершинами v_i и v_j:

$$r(v_i, v_j) = \min_k l_k(v_i, v_j),$$

где $l_k(v_i, v_j)$ – длина k-й цепи.

Максимальное расстояние между вершинами графа G называется *диаметром* графа $d(G)$:

$$d(G) = \max_{i,j} r(v_i, v_j).$$

Введенная на множестве всех пар вершин (v_i, v_j) графа G функция $r(v_i, v_j)$ удовлетворяет трем аксиомам:

$$(\forall\ v_i, v_j)\ (r(v_i, v_j) = 0) \leftrightarrow v_i = v_j;$$

$$(\forall\ v_i, v_j)\ (r(v_i, v_j) = r(v_j, v_i));$$

$$(\forall\ v_i, v_j, v_k)\ (r(v_i, v_j) + r(v_j, v_k) \geq r(v_i, v_k))$$

и определяет его метрику.

Последнюю аксиому обычно называют неравенством треугольника.

Матрица называется *k-клеточной*, если в результате перестановки строк и столбцов она преобразуется к клеточному виду с k клетками. Каждая клетка при этом не содержит нулевых элементов, кроме, быть может, диагональных.

Теорема. *Граф G состоит из k компонент связности тогда и только тогда, когда его матрица достижимости*

$$D(G) = \sum_{i=1}^{d(G)} [S(G)]^i\ ,$$

где $S(G)$ *– матрица смежности графа* G; $d(G)$ *– диаметр графа* G, *является k-клеточной.*

Граф, состоящий из одной вершины, называется *тривиальным*. Удаление вершины из нетривиального графа G приводит к подграфу $G\backslash v$, содержащему все вершины графа G, кроме v, и все ребра графа G, не инцидентные v. Аналогично, удаление ребра x приводит к подграфу, содержащему все вершины (остовному подграфу) и ребра, за исключением ребра x, т.е. $G\backslash x$.

Связностью $\chi\ (G)$ графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых делает граф несвязным или тривиальным. Из этого определения следует, что для любого несвязного графа $\chi\ (G) = 0$.

Если $\chi\ (G) \geq n$, то граф G называют *n-связным*.

Реберной связностью $\lambda\ (G)$ графа G называется наименьшее количество ребер, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Для несвязного или тривиального графа $\lambda\ (G) = 0$.

Рассмотрим ориентированный граф и его свойство быть сильно связным.

Понятие *путь* определяется как последовательность дуг $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ вида $\delta_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, ..., n$. Вершины пути могут иметь степень, равную 1. Вершина v_i со степенью, равной 1, называется *концевой*. При этом вершина v_1, коинцидентная дуге δ_1, называется *начальной*, а вершина v_{n+1}, коинцидентная дуге δ_n – *конечной*. Число дуг, образующих путь, называется *длиной* пути. Путь называется *составным*, если в нем повторяется хотя бы одна дуга, *сложным* – хотя бы одна вершина, и *простым* – в противном случае.

Контуром называется путь, концевые вершины которого совпадают. Все вершины контура имеют степень $s(v_i) \geq 2$.

Граф $G = \langle V, U\rangle$ называется *сильно связным*, если любая пара его вершин соединена путем.

Максимальный по включению вершин сильно связный подграф графа называется его *компонентой сильной связности*. Граф называется *несильно связным*, если число его компонент сильной связности больше 1.

Рассмотрим алгоритм определения сильной связности графа и числа его компонент сильной связности. Этот алгоритм, также как и алгоритм определения связности графа и числа компонент связности, рассмотренный для случая неориентированного графа, основан на использовании предыдущей теоремы.

Определим сильную связность ориентированного графа, представленного на рис. 20.

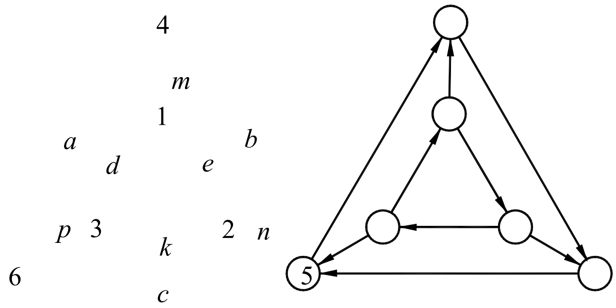


Рис. 20

Матрица смежности этого графа имеет вид:

$S(G) =$

	1	2	3	4	5	6	
		e		*m*			1
			k		*n*		2
	d					*p*	3
					b		4
						c	5
				a			6

Максимальная степень, в которую необходимо возвести матрицу смежности S графа G, равна диаметру $d(G)$ этого графа:

$$d(G) = \max_{i,\ j} \min_{k} l_k(v_i, v_j),$$

где $l_k(v_i, v_j)$ – длина k-го пути от вершины v_i к вершине v_j.

В рассматриваемом примере диаметр $d(G)$ графа G равен 3. Матрицу достижимости $D(G)$ вычисляем как $\sum_{i=1}^{3}[S(G)]^i$:

$D(G) =$

1	2	3	4	5	6	
ekd	*e*	*ek*	*m*	*en mb*	*ekp enc mbc*	1
kd	*kde*	*k*	*kdm kpa nca*	*n*	*kp nc*	2
d	*de*	*dek*	*dm pa*	*den dmb pab*	*p*	3
			bca	*b*	*bc*	4
			ca	*cab*	*c*	5
			a	*ab*	*abc*	6

Компоненте сильной связности в матрице достижимости соответствует подматрица максимального размера, каждый элемент которой не равен пустой строке символов. Элементы, показывающие связь между подматрицами, могут быть не пустыми строками.

В данном примере имеем две компоненты сильной связности с носителями {1, 2, 3} и {4, 5, 6} соответственно.

Задачи и упражнения

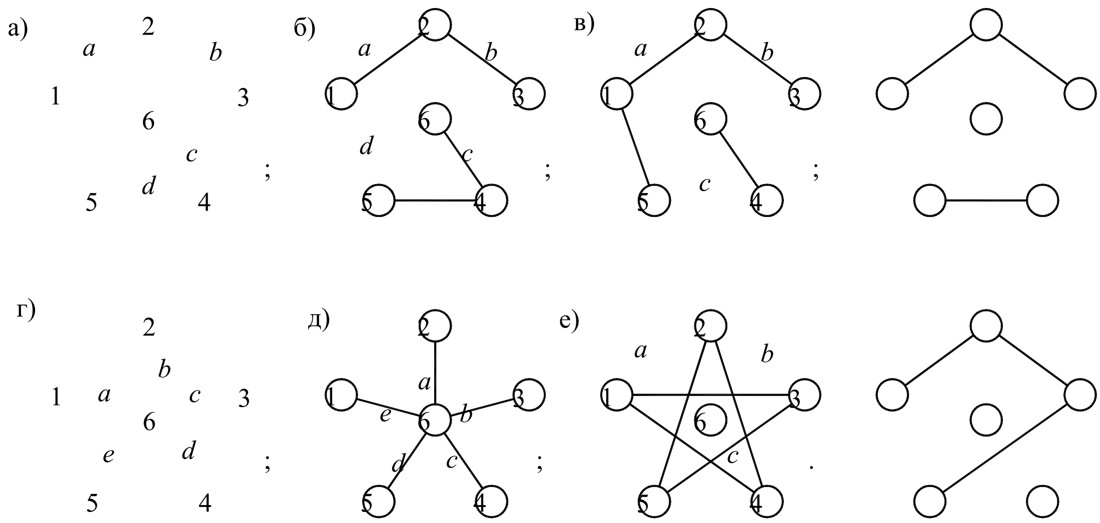
1 Определить множество концевых вершин цепи:

а) ({1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5});
б) ({2, 3}, {1, 2}, {1, 5}, {2, 5}, {2, 4});
в) ({1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5}, {2, 5});
г) ({3, 4}, {4, 5}, {1, 5}, {1, 2}, {2, 3});
д) ({1, 2}, {1, 3}, {3, 5}, {1, 5}, {1, 3}, {3, 4});
е) ({2, 5}, {1, 5}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {2, 4}).

2 Установить, какие из цепей из предыдущей задачи являются:

а) простой цепью; в) составной цепью;
б) сложной цепью; г) циклом.

3 Определить диаметр $d(G)$, матрицу достижимости $D(G)$ и число $k(G)$ компонент связности неориентированного графа G:



4 Определить, является ли простым путем, сложным путем, составным путем, контуром путь:

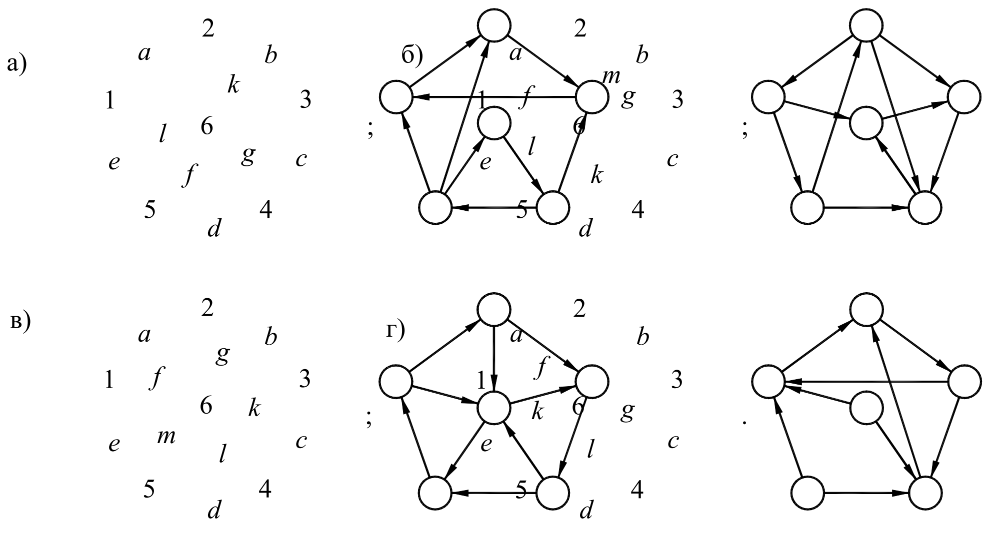
а) ((5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1));

б) ((3, 1), (1, 5), (5, 4), (4, 1), (1, 2));

в) ((4, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 2), (2, 1), (1, 3));

г) ((1, 3), (3, 5), (5, 4), (4, 2), (2, 1)).

5 Определить диаметр $d(G)$, матрицу достижимости $D(G)$ и число $k(G)$ компонент сильной связности ориентированного графа G:



8 цикломатика

Для исследования циклов в графе используют *цикломатическую матрицу* $C(G) = [c_{ij}]$. Каждому циклу графа взаимно однозначно сопоставляется вектор-строка матрицы $C(G)$. Каждый элемент этой строки определяется следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-е ребро входит в } i\text{-й цикл;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Множество $C(G)$ всех векторов, каждый из которых соответствует одному циклу графа G, образует векторное пространство, называемое *пространством циклов графа* G. При этом для любых двух циклов R_i, $R_j \in C(G)$, $R_i \cap R_j \neq \varnothing$, существует некоторый третий цикл $(R_i \oplus R_j) \in C(G)$, где символ $\oplus$ обозначает поразрядное сложение по модулю два.

Базисом пространства циклов называется всякая система линейно независимых векторов, порождающая данное пространство. Всякий элемент пространства циклов единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов базиса пространства циклов. Если пространство имеет базис из n векторов, то оно называется *n-мерным пространством.*

Базис циклов графа G – это базис пространства циклов графа G, состоящий из простых циклов. Любой вектор пространства циклов графа G можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса циклов.

Рассмотрим граф, изображенный на рис. 21, *а*. Цикломатическая матрица $C(G)$ этого графа имеет вид:

$$C(G) = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccccccccc|c} a & b & c & d & e & f & m & g & h & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & R_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & R_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & R_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & R_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & R_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & R_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & R_7 \end{array}$$

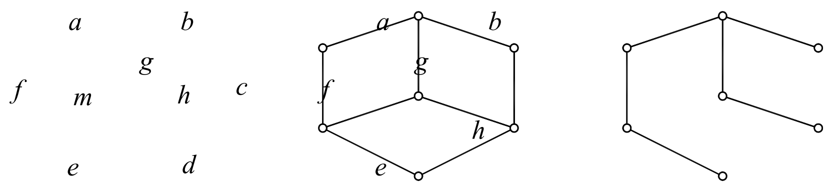
В качестве базиса циклов можно взять множество циклов $\{R_1, R_2, R_3\}$. Можно убедиться в том, что все остальные циклы выражаются их линейными комбинациями:

$$R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 = R_4,\ R_1 \oplus R_2 = R_5,\ R_1 \oplus R_3 = R_7,\ R_2 \oplus R_3 = R_6.$$

Деревом называется связный граф, не содержащий ни одного цикла. *Остовный подграф* графа – это подграф, содержащий все вершины графа. *Остовом* называется остовный подграф, являющийся деревом. *Хордой остова D* в связном графе G называется всякое ребро графа, не принадлежащее D. Любой подграф, который состоит из хорды и остова, имеет точно один цикл.

Цикломатическое число $\nu(G)$ *графа G* равно числу хорд любого остова графа G. Если связный граф G имеет n вершин и m ребер, то его цикломатическое число

$$\nu(G) = m - n + 1.$$



а) *б*)

Рис.

Если граф G содержит k компонент связности, n вершин и m ребер, то

$$\nu(G) = m - n + k.$$

Цикломатическое число несвязного графа G с k компонентами связности G_i, $i = 1, 2, ..., k$ может быть определено и как сумма цикломатических чисел его компонент связности:

$$\nu(G) = \sum_{i=1}^{k} \nu(G_i) .$$

Лесом называется граф, не содержащий циклов. Если лес G имеет n вершин и k компонент связности, то он содержит $(n - k)$ ребер.

Теорема (теорема Эйлера). *Число базисных циклов графа постоянно и равно его цикломатическому числу*.

Базисом циклов для данного остовного леса D графа G является множество всех циклов графа G, каждый из которых содержит только одну хорду остова D. В рассматриваемом примере множество циклов $\{R_1, R_2, R_3\}$ является базисом циклов графа G относительно остова D, представленного на рис. 21, *б*.

Цикломатическая матрица, представляющая базис циклов графа G, называется *базисной цикломатической матрицей* $C_б(G)$. В нашем случае базисная цикломатическая матрица имеет следующий вид:

$$C_б(G) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|cccccc} \multicolumn{3}{c|}{\text{хорды}} & \multicolumn{6}{c}{\text{остов } D} \\ c & m & d & a & b & e & f & g & h \end{array}$$

$$C_б(G) = \left\| \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

Выполнив $(2^{\nu} - \nu - 1)$ раз операцию сложения по модулю два над базисными циклами, можно получить все множество циклов этого пространства.

Изучая свойства циклов графа, можно определить принадлежность графа к определенному классу, например, к классу двудольных графов.

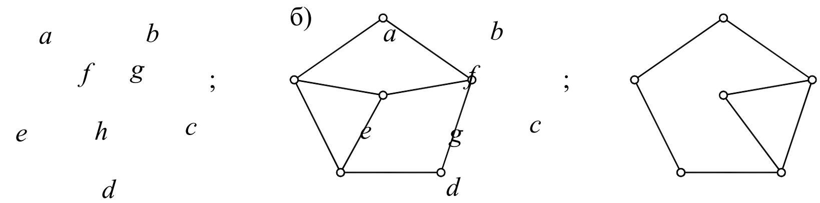
Теорема. *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют четную длину* (*четны*).

Если в двудольном графе каждая вершина из одного множества вершин V_1 соединена с каждой вершиной из другого множества вершин V_2, то граф называется *полным двудольным графом* и обозначается $K_{m,n}$, где m – число вершин V_1, а n – число вершин V_2. Граф $K_{m,n}$ имеет $(m + n)$ вершин и mn ребер. Полный двудольный граф $K_{1,n}$ называется *звездным графом* (*звездой*) и является деревом. Заметим, что любое дерево является двудольным графом.

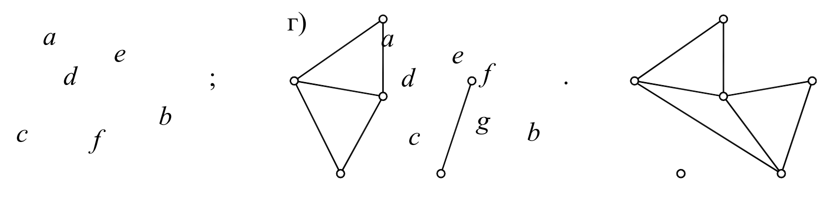
Задачи и упражнения

1 Определить цикломатическое число $\nu(G)$ графа G:

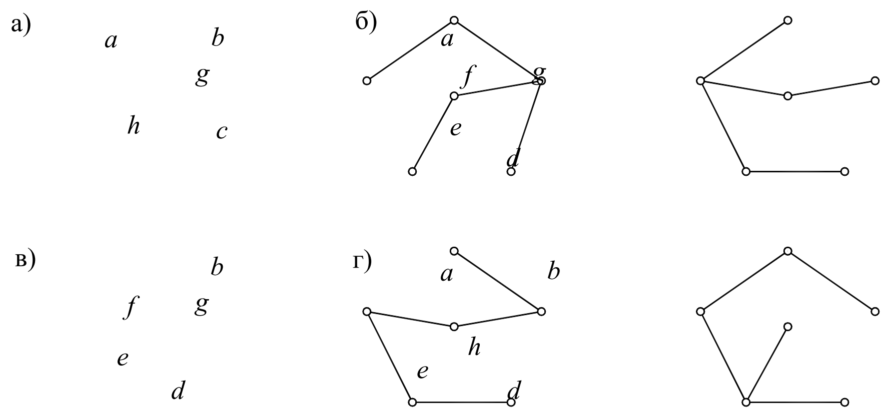
а) б)



в) г)

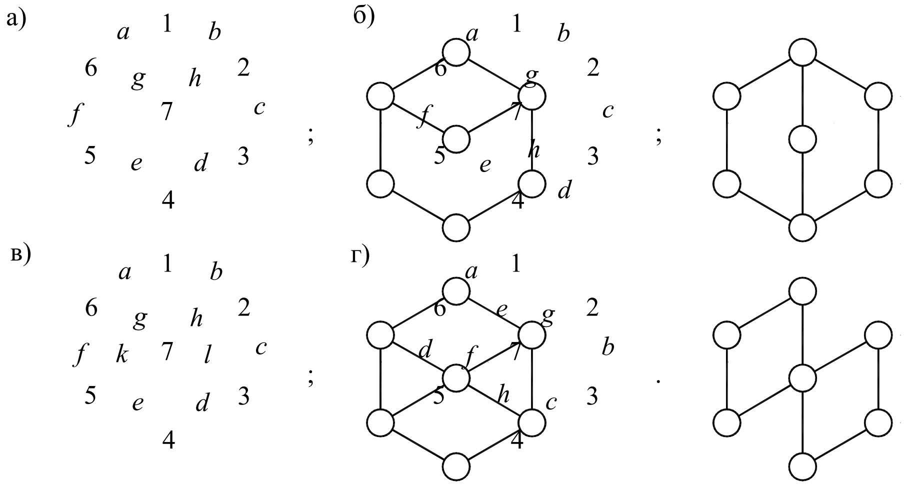


2 Получить базисную цикломатическую матрицу $C_б(G)$ графа G (см. задачу 1, а) относительно остова:



3 Получить цикломатические матрицы $C(G)$ для всех графов из задачи 1.

4 Установить, является ли двудольным граф:



Двудольные графы представить графически с отдельным расположением двух множеств вершин.

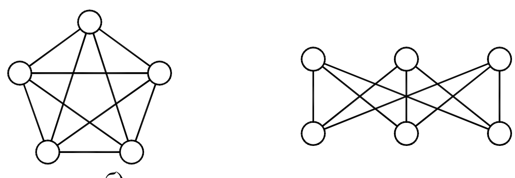
9 ПЛАНАРНОСТЬ

Рассмотрим топологические свойства графов. Эти свойства определяются топологическими инвариантами относительно гомеоморфных преобразований.

Два графа являются *гомеоморфными*, если они изоморфны с точностью до вершин степени два. Другими словами, два графа гомеоморфны, если они преобразуются до графов, изоморфных друг другу, заменой некоторых ребер цепями какой-нибудь длины.

Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы ребра пересекались только в вершинах. Проблема характеризации планарных графов долгое время оставалась нерешенной. В 1927 г. Понтрягин Л. С. доказал (но не опубликовал) критерий планарности, который независимо от него был открыт и опубликован польским математиком Куратовским в 1930 г.

Теорема (теорема Л. С. Понтрягина). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа или частичного графа, гомеоморфного F_5 или $K_{3,3}$* (рис. 22, *а*, *б*).



а) *б*)

Рис.

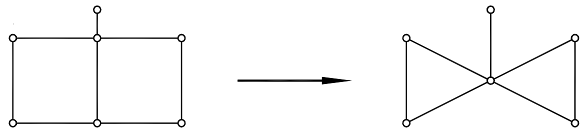
g *g*

c *a* *e* *c* *e*

a(*b*)

d *b* *f* *d* *f*

Рис.



Основываясь на критерии Понтрягина, можно получить еще один критерий планарности. Этот критерий использует понятие *элементарного стягивания*, заключающегося в следующем. При стягивании любого ребра $\{a, b\}$ графа оно исчезает, а вершины, коинцидентные этому ребру, отождествляются (рис. 23). Полученная таким образом вершина коинцидентна тем же ребрам, что и a, b (кроме ребра, которое выброшено).

Теорема. *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа или частичного графа, стягиваемых к* F_5 *или* $K_{3,3}$.

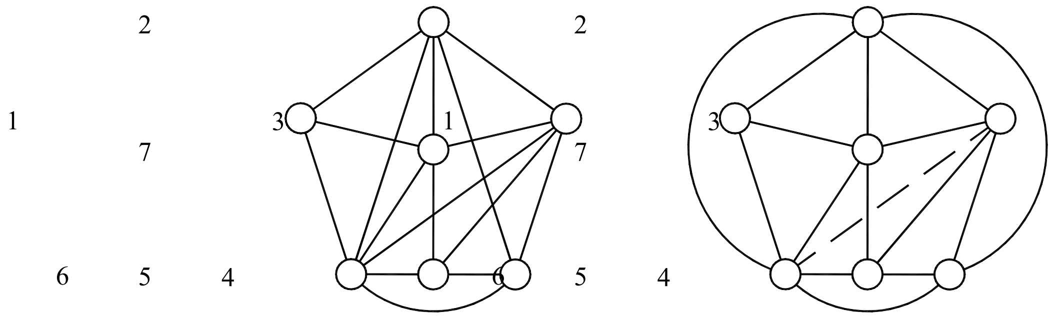
Рассмотрим задачу проектирования печатной схемы электронного устройства. При проектировании такой схемы соединительные провода наносят печатным способом на плоскую поверхность изоляционного материала. Печатные проводники не изолированы и поэтому не должны пересекаться. Если граф электронного устройства, в котором роль вершин играют приборы, а ребер – соединительные проводники, является планарным, то печать проводников может быть выполнена на одной плоскости. В том случае, когда граф не планарный, печать осуществляется на нескольких плоскостях, число которых определяется числом скрещиваний (толщиной) графа – наименьшим возможным числом пересечений при изображении графа на плоскости.

Толщиной $t(G)$ графа G называется наименьшее число планарных графов, объединение которых дает G. Толщина планарного графа равна 1. Толщина графа $G = \langle V, U \rangle$ определяется неравенством

$$t(G) \geq 1 + \left] \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} s_i - 2}{6\,(n-2)} \right[,$$

где $]\,[$ – целая часть; n – мощность множества V; s_i – степень i-й вершины.

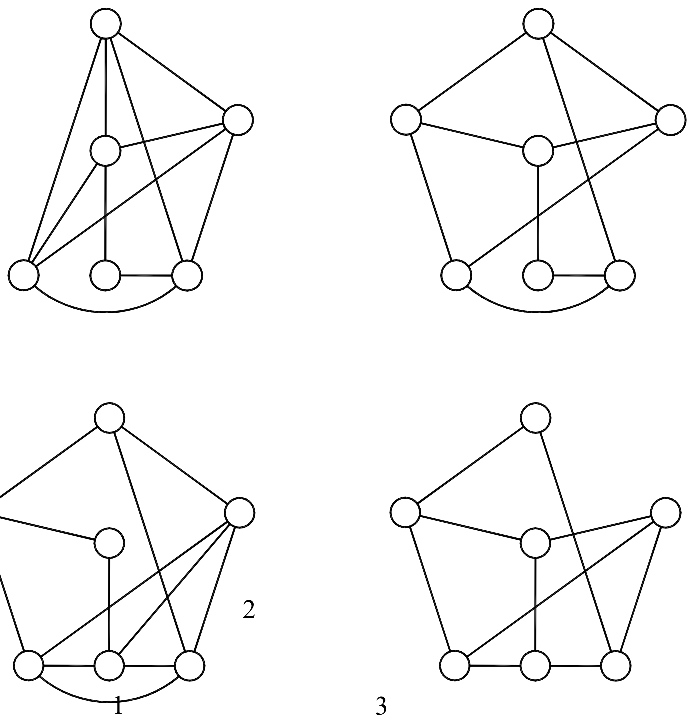
Рассмотрим граф электронного устройства, изображенный на рис. 24, *а*. Определим, является ли этот граф планарным, и если нет, то выясним, сколько потребуется слоев при изготовлении печатной схемы и какие ребра графа следует удалить, чтобы граф стал планарным.



а) *б*)

Рис. 24

Согласно критерию Понтрягина этот граф является непланарным, поскольку содержит запрещенные фигуры: частичный подграф и подграф, гомеоморфные графу F_5 (рис. 25, *а*, *в*), и подграфы, гомеоморфные графу $K_{3,3}$ (рис. 25, *б*, *г*).



Графы на рис. 25, *а*, *б* преобразуются в графы, изоморфные графам F_5 и $K_{3,\,3}$ соответственно, в результате замены цепей ({4, 5}, {5, 7}) ребрами {4, 7}. Граф на рис. 25, *в* преобразуется в граф, изоморфный графу F_5, в результате стягивания сначала ребра {1, 7}, а затем ребра {1(7), 2}. Граф на рис. 25, *г* преобразуется в граф, изоморфный графу $K_{3,\,3}$, в результате стягивания ребра {1, 2}.

Толщина рассматриваемого графа не меньше двух:

$$t(G) \geq 1 + \left]\frac{32-2}{6\,(7-2)}\right[= 2, \quad t(G) \geq 2.$$

Чтобы определить, какие ребра следует удалить для преобразования графа в планарный граф, необходимо выделить все запрещенные фигуры и построить двумерную таблицу, строки которой взаимно однозначно соответствуют каждой запрещенной фигуре Q_i, столбец – ребру ρ_j. Тогда покрытие строк столбцами этой таблицы определит, какие ребра следует удалить для приведения графа к планарному виду. Минимальное покрытие будет соответствовать минимальному решению.

Рис. 25

Для рассматриваемого графа (рис. 24, *а*) такая таблица имеет следующий вид.

Таблица 14

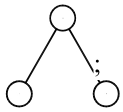
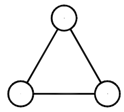
Q_i	ρ_j															
	{1, 2}	{2, 6}	{2, 3}	{1, 6}	{6, 7}	{1, 7}	{2, 4}	{2, 7}	{3, 5}	{3, 6}	{3, 7}	{3, 4}	{4, 6}	{4, 5}	{5, 6}	{5, 7}
Q_1		1	1		1		1	1		1	1	1	1	1		1
Q_2	1		1	1		1	1			1	1		1	1		1
Q_3	1		1	1		1	1		1	1		1	1	1	1	1
Q_4	1			1		1	1			1	1	1		1	1	1

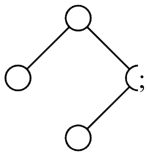
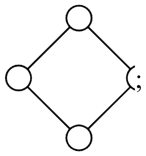
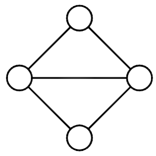
Элемент (i, j) таблицы равен 1, если в фигуре Q_i имеется ребро ρ_j; в противном случае – 0. Покрытие строк столбцами этой таблицы определит искомое решение. Минимальное покрытие будет соответствовать минимальному решению.

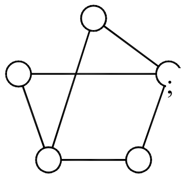
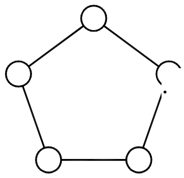
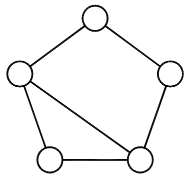
В качестве минимального покрытия может выступать любое из ребер: {2, 4}, {3, 6}, {4, 5} или {5, 7}. После удаления, для определенности, ребра {3, 6} получаем планарный граф, плоское представление которого изображено на рис. 24, *б*. Соединение, которое соответствует удаленному ребру, показано штриховой линией и должно быть реализовано на второй плоскости.

Задачи и упражнения

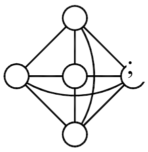
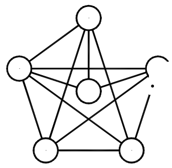
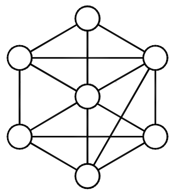
13 Укажите множества гомеоморфных графов из предложенных графов:

а) ; б)  ; в)  ; 

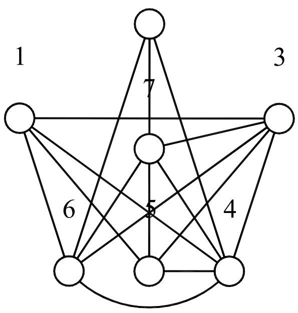
г) ; д)  ; е)  ; 

ж) ; з)  ; и)  . 

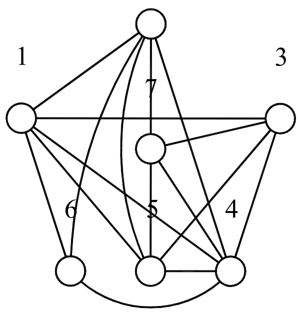
14 Оцените толщину графа:

а) ; б)  ; в)  . 

15 Выделите все запрещенные фигуры в графе и найдите все ребра графа, удаление любого из которых преобразует его в планарный граф:

а) 

;

б) 

.

10 РАЗРЕШИМЫЕ И НЕРАЗРЕШИМЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим систему подстановок, задаваемую алфавитом $M = \{m_i / i = = 1, 2, ..., p\}$ и *базисными подстановками*

$$\alpha_i \to \beta_i,$$

где α_i, β_i – формулы (слова), быть может пустые, в алфавите M.

Элементы некоторого конечного множества отношений между формулами называются *правилами вывода*.

Каждую подстановку будем понимать как правило вывода. Часто систему подстановок называют *полусистемами Туэ*, в честь норвежского математика Акселя Туэ. Используя эти полусистемы, Хомский сформулировал и развил аппарат формальных грамматик.

Определим понятие *формальной грамматики*, которую в дальнейшем будем называть просто грамматикой. Рассмотрим конечный алфавит $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$, элементы которого будем называть *символами* (буквами), а конечные последовательности символов – *словами*.

Обозначим все множество слов, на длину которых не наложены никакие ограничения, $Я_0$. Будем говорить, что $Я \subset Я_0$ – *язык* в алфавите M.

Пусть G – некоторая совокупность правил, с помощью которых в M порождаются все слова, принадлежащие языку Я, и только они. Совокупность правил G будем называть *грамматикой языка* Я. Два языка будем называть *эквивалентными*, если множества слов, из которых они состоят, совпадают. Две грамматики G_1 и G_2 над языком Я называются *эквивалентными*, если языки, ими порождаемые, эквивалентны.

Условимся говорить, что G – *грамматика с конечным числом состояний*, если правила порождения слов из алфавита $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ задаются следующим образом.

Существует конечное множество состояний $\{s_0, s_1, ..., s_r\}$ и каждому s_j ($j = 1, 2, ..., r$) сопоставляется набор пар вида (m_i, s_q), где $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $q \in \{1, 2, ..., r\}$. Состоянию s_0 сопоставляются пары вида (m_0, s_h), где $h \in \{1, 2, ..., r\}$. Символ m_0 – специальный знак пробела между словами. Конструирование слов происходит так: из состояния s_0 совершают переход в любое состояние s_q из тех состояний, которые являются вторыми членами пар вида (m_0, s_q), и в начале слова ставят знак пробела. Исходя из пар, сопоставленных выбранному s_q, берут любую (m_i, s_l). Этот выбор определяет следующее значение s_l и первый символ m_i конструируемого слова. Далее процесс построения слова происходит аналогично. Слово заканчивается при переходе к заключительному состоянию, как правило, состоянию s_0.

Язык, порождаемый грамматикой с конечным числом состояний, называется *языком с конечным числом состояний*. Структуру таких языков удобно изображать в виде графа, вершины которого сопоставлены состояниям

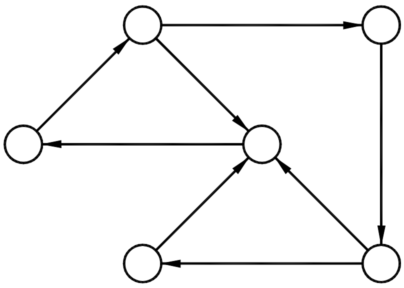


Рис.

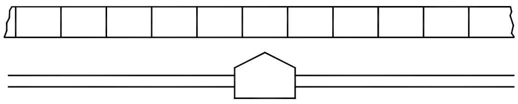


Рис. 27

s_j ($j = 1, 2, ..., r$), а дуги – парам (m_i, s_q), где $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $q \in \{1, 2, ..., r\}$. На рис. 26 приведен пример такого графа.

С помощью грамматики, задаваемой этим графом, порождается язык, который состоит из следующего множества слов: $\{m_1m_1, m_1m_2m_3m_1, m_1m_2m_3m_3m_1\}$.

Порождение цепочек символов можно рассматривать как результат работы некоторого гипотетического устройства, изображенного на рис. 27.

Вдоль бесконечной (в обе или одну сторону) ленты, разделенной на клетки, перемещается управляющая головка (УГ). Заданы внешний алфавит $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$, символы которого называются *буквами*, внутренний алфавит $S = \{s_0, s_1, ..., s_r\}$, символы которого называются *состояниями*, и алфавит перемещений $D = \{П, Л, Н\}$. Все клетки ленты заполнены символами из M, по одному символу в каждой клетке. Символ m_0 играет роль пустого символа (если в некоторой клетке стоит m_0, то «в клетке ничего не записано»). Предполагается, что вся бесконечная лента везде заполнена символами m_0, за исключением тех клеток, где записаны какие-либо другие символы из M.

Управляющая головка может находиться в тех или иных состояниях, характеризуемых символами из S. Состояние s_0 особое. Если УГ находится в состоянии s_0, то «машина не производит никакой работы (выключена)». Предполагается, что в конце работы машины всегда переходит в s_0. В процессе работы машины УГ может перемещаться в дискретные такты времени вдоль ленты.

Перемещение в данный такт работы происходит либо на одну клетку вправо (*П*), либо на одну клетку влево (*Л*), либо может отсутствовать (*Н*).

В каждый такт работы управляющая головка совершает следующие действия: 1) считывает символ m_i, находящийся в клетке ленты, которую в этом такте она «видит»; 2) в соответствии со считанным символом m_i и своим состоянием s_j записывает символ m_i в эту клетку; 3) движется или не движется вдоль ленты; 4) переходит в следующее состояние s_p.

Всю работу машины можно задать с помощью функциональной таблицы T, в клетках которой стоят тройки вида $m_k s_p d_l$, где $d_l \in D$ – символ, определяющий перемещение. Таким образом, функциональная таблица определяет отображение $M \times S$ в $M \times S \times D$. Содержательный смысл отображения $(m_i, s_j) \to (m_k, s_p, d_l)$ состоит в том, что, находясь в состоянии s_j и считывая из клетки символ m_i, управляющая головка записывает в данную клетку ленты символ m_k, переходит в состояние s_p и производит движение, определяемое символом d_l. Условимся считать, что таблица T всегда устроена так, что имеет место отображение $(m_i, s_0) \to (m_i, s_0, H)$. Это означает, что в «выключенном» состоянии машина не работает.

До начала функционирования машины следует заполнить (если это необходимо) некоторые клетки ленты символами, отличными от m_0, перевести УГ в состояние, отличное от s_0, и задать ее исходное положение относительно ленты. После этого машина будет функционировать в соответствии с таблицей T. Функционирование машины можно задать и с помощью графа, вершины которого взаимно однозначно соответствуют состояниям этого устройства, дуги – переходам из одного состояния в другое, при этом каждая дуга (s_j, s_p) взвешена парой $(m_i, m_k d_l)$.

Описанное гипотетическое устройство называется по имени английского математика *машиной Тьюринга*.

Приведем *интуитивное* (*наивное*) *определение алгоритма*. Совокупность правил, обладающих свойствами *массовости* (инвариантности относительно входной информации), *детерминированности* (однозначности применения этих правил на каждом шаге), *результативности* (получения после применения этих правил информации, являющейся результатом) и *элементарности* (отсутствии необходимости дальнейшего уточнения правил), называется *алгоритмом*.

Тезис Тьюринга. *Для любого алгоритма, понимаемого в интуитивном смысле, можно построить машину Тьюринга, функционирование которой эквивалентно этому алгоритму.*

Понятие машины Тьюринга является строгим уточнением интуитивного понятия алгоритма и позволяет решить вопрос алгоритмической (машинной) разрешимости той или иной проблемы.

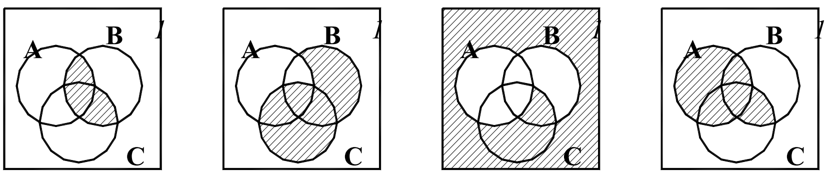
Проблема является *алгоритмически неразрешимой*, если не существует алгоритма (соответствующей машины Тьюринга) для ее решения. Заметим, что отдельная машина Тьюринга может быть представлена как программа произвольного вида для цифровой вычислительной машины с потенциально бесконечной памятью.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ И УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

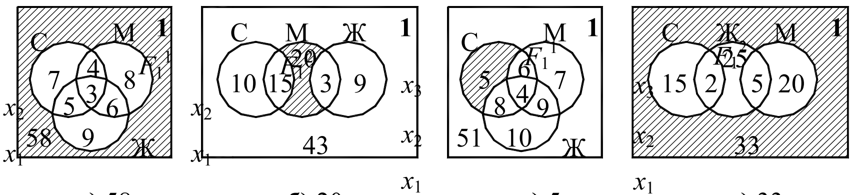
1. **а)** $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$; **б)** $\{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$; **в)** $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$; **г)** $\{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.

2.



а) **б)** **в)** **г)**

3.

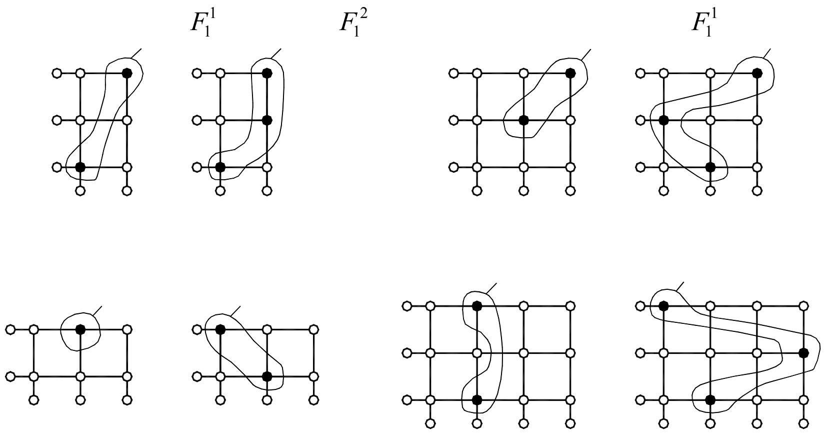


а) 58 б) 20 в) 5 г) 33

4. **а)** {(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)}; **б)** {(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)}; **в)** {(b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)}; **г)** {(3, b), (3, c), (3, e), (4, b), (4, c), (4, e)}.

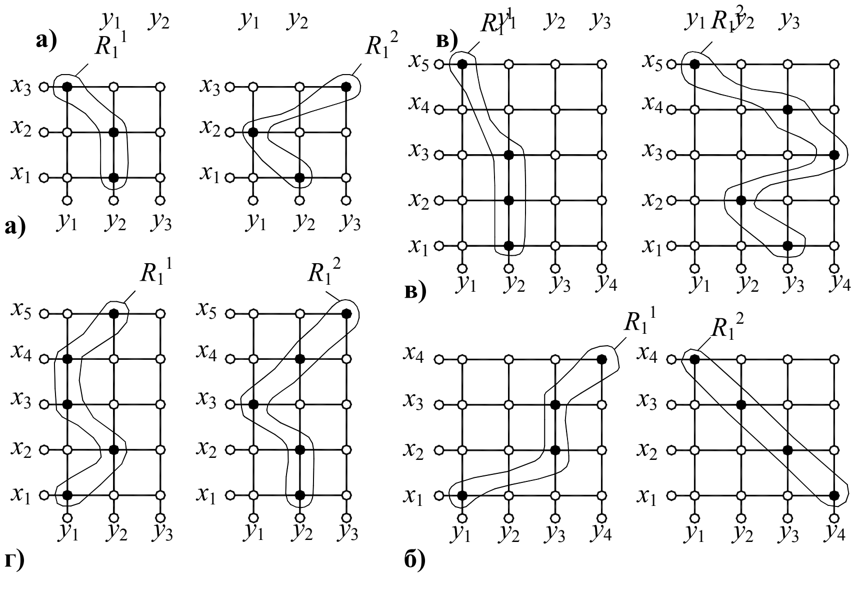
5. **а)** {(a_1, b_1, c_1), (a_1, b_1, c_2), (a_1, b_2, c_1), (a_1, b_2, c_2), (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_2), (a_2, b_2, c_1), (a_2, b_2, c_2)}; **б)** {(т, о, ?), (т, о, !), (д, о, ?), (д, о, !)}; **в)** {(3, d, *), (3, e, *), (4, d, *), (4, e, *)}; **г)** {(р, а, к), (р, а, м), (р, о, к), (р, о, м), (т, а, к), (т, а, м), (т, о, к), (т, о, м)}.

6. Решения не единственные:

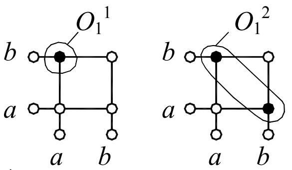


7. Решения не единственные: **а)** $F_2^1 = \{(x_1, y_1, z_3), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\}$; $F_2^2 = \{(x_1, y_1, z_2), (x_1, y_2, z_3), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\}$; **б)** $F_2^1 = \{(x_1, y_1, z_2), (x_3, y_1, z_1)\}$; $F_2^2 = \{(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_2, z_3), (x_2, y_1, z_2), (x_2, y_2, z_3), (x_3, y_1, z_1), (x_3, y_2, z_2)\}$; **в)** $F_2^1 = \{(x_1, y_3, z_2), (x_2, y_2, z_1), (x_2, y_3, z_2)\}$; $F_2^2 = \{(x_1, y_1, z_2), (x_1, y_2, z_2), (x_1, y_3, z_1), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_2, y_3, z_2)\}$; **г)** $F_2^1 = \{(x_1, y_1, z_2), (x_1, y_2, z_4)\}$; $F_2^2 = \{(x_1, y_1, z_4), (x_1, y_2, z_3), (x_2, y_1, z_3), (x_2, y_2, z_2)\}$.

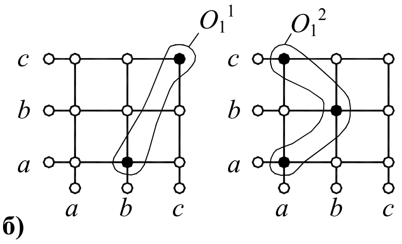
8. Решения не единственные:



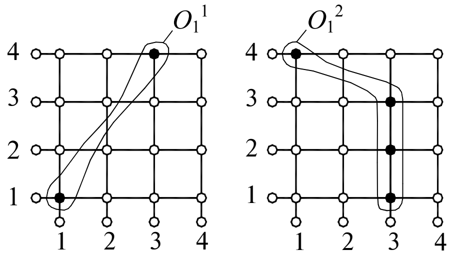
9. Решения не единственные:



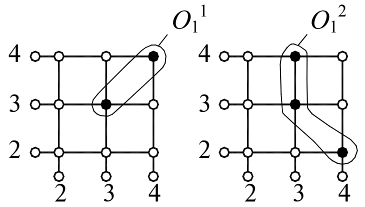
а)



б)



в)



г)

10. Решения не единственные: **а)** $O_2^1 = \{(a, a, b)\}$; $O_2^2 = \{(a, a, b), (a, b, b), (b, a, b), (b, b, a)\}$; **б)** $O_2^1 = \{(1, 1, 3), (2, 2, 2), (3, 2, 1)\}$; $O_2^2 = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 3, 3), (2, 1, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 3), (3, 1, 3), (3, 2, 2), (3, 3, 1)\}$; **в)** $O_2^1 = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$; $O_2^2 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$; **г)** $O_2^1 = \{(a, a, b), (b, c, c), (c, a, b), (c, b, a)\}$; $O_2^2 = \{(a, a, a), (a, b, a), (a, c, a), (b, a, c), (b, b, c), (b, c, c), (c, a, b), (c, b, b), (c, c, a)\}$.

Глава 2

1 **а)** группоид, не идемпотентный группоид, абелев группоид, полугруппа, абелева полугруппа, группа, абелева группа; **б)** группоид, идемпотентный группоид, абелев группоид, полугруппа, абелева полугруппа, не группа, не является абелевой группой; **в)** группоид, идемпотентный группоид, абелев группоид, полугруппа, абелева полугруппа, не группа, не является абелевой группой; **г)** группоид, идемпотентный группоид, абелев группоид, полугруппа, абелева полугруппа, не группа, не является абелевой группой.

2 **а)** по умножению – мультипликативный группоид, по сложению - абелева группа, кольцо, тело, поле; **б)** по операции пересечения – мультипликативный группоид, по операции объединения - не является абелевой группой, не кольцо, не тело, не поле.

Глава 3

1 **а)** $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$; **б)** $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$; **в)** $\{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$; **г)** $\{(d, d), (d, e), (d, f), (e, d), (e, e), (e, f), (f, d), (f, e), (f, f)\}$.

2

а)

	a	*b*	*c*	*d*
a	1	1		
b		1	1	
c	1			
d				1

б)

	a	*b*	*c*	*d*
a			1	
b	1			1
c			1	1
d				

в)

	a	*b*	*c*	*d*
a		1		
b	1			1
c	1			
d		1	1	

г)

	a	*b*	*c*	*d*
a				1
b			1	
c		1	1	
d	1			1

3 **а)** $\{(1, 2), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$; **б)** $\{(1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$; **в)** $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$; **г)** $\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$.

4

а) $M/T = \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ \{a\} & \{b, c\} & \{a\} \end{matrix} \right\|$ **б)** $M/T = \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ \varnothing & \{a\} & \{a, b, c\} \end{matrix} \right\|$

в) $M/T = \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ \{a, c\} & \{a, b\} & \varnothing \end{matrix} \right\|$ **г)** $M/T = \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ \{a, b, c\} & \varnothing & \{c\} \end{matrix} \right\|$

5 **а)** нерефлексивное; **б)** рефлексивное; **в)** антирефлексивное; **г)** рефлексивное.

6 **а)** симметричное; **б)** несимметричное; **в)** несимметричное; **г)** антисимметричное.

7 **а)** антитранзитивное; **б)** транзитивное; **в)** транзитивное; **г)** нетранзитивное.

9 **а)** да; **б)** нет; **в)** нет; **г)** да; **д)** нет; **е)** нет; **ж)** да; **з)** да.

10 **а)** нет; **б)** да; **в)** нет; **г)** да; **д)** нет; **е)** да; **ж)** да; **з)** нет.

11 **а)** да; **б)** нет; **в)** нет; **г)** да; **д)** да; **е)** да; **ж)** нет; **з)** да.

12 **а)** $n = 3$, $K(a) = \{a\}$; **б)** $n = 2$, $K(a) = \{a, b, c\}$; **в)** $n = 2$, $K(a) = \{a, d\}$; **г)** $n = 4$, $K(a) = \{a\}$; **д)** $n = 3$, $K(a) = \{a\}$; **е)** $n = 1$, $K(a) = \{a, b, c, d\}$; **ж)** $n = 2$, $K(a) = \{a, c, d\}$; **з)** $n = 3$, $K(a) = \{a, c\}$.

13 **а)** нет; **б)** нет; **в)** да; **г)** нет; **д)** нет; **е)** да; **ж)** да; **з)** нет.

Глава 4

1 **а)** $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$; $f_с(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3$; $f_{мин}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3$; **б)** $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$; $f_{мин}(x_1, x_2, x_3) = f_с(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_3$; **в)** $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$; $f_с(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2$; $f_{мин}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2$ или $f_{мин}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2$; **г)** $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$; $f_с(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \vee x_1$; $f_{мин}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \vee x_1$; **д)** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4$; $f_с(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3$; $f_{мин}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3$ или $f_{мин}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3$; **е)** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3x_4$; $f_с(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_4$; $f_{мин}(x_1, x_2, x_3, x_4) = = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_4$; **ж)** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3x_4$; $f_с(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$; $f_{мин}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ или $f_{мин}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$; **з)** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4$; $f_{мин}(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_с(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$.

2 **а)** $f_с(x_1, x_2, ..., x_5) = x_1\bar{x}_3 \vee x_5 \vee x_2\bar{x}_3x_4$; $f_{мин}(x_1, x_2, ..., x_5) = x_1\bar{x}_3 \vee x_5$; **б)** $f_с(x_1, x_2, ..., x_6) = x_2x_6 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_4x_6$; $f_{мин}(x_1, x_2, ..., x_6) = x_2x_6 \vee \bar{x}_3x_4$; **в)** $f_с(x_1, x_2, ..., x_6) = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1x_5 \vee \bar{x}_5x_6 \vee x_6x_7 \vee \bar{x}_1x_3$; $f_{мин}(x_1, x_2, ..., x_6) = = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_5x_6 \vee \bar{x}_1x_3$ или $f_{мин}(x_1, x_2, ..., x_6) = \bar{x}_1x_2 \vee x_6x_7 \vee \bar{x}_1x_3$ или $f_{мин}(x_1, x_2, ..., x_6) = \bar{x}_1x_5 \vee \bar{x}_5x_6 \vee \bar{x}_1x_3$ или $f_{мин}(x_1, x_2, ..., x_6) = \bar{x}_1x_5 \vee x_6x_7 \vee \bar{x}_1x_3$; **г)** $f_с(x_1, x_2, ..., x_7) = \bar{x}_2x_3 \vee x_3x_5\bar{x}_7 \vee x_3\bar{x}_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_6 \vee x_2x_5\bar{x}_7$; $f_{мин}(x_1, x_2, ..., x_7) = \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_5\bar{x}_7$ или $f_{мин}(x_1, x_2, ..., x_7) = \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_2x_5\bar{x}_7$ или $f_{мин}(x_1, x_2, ..., x_7) = \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2x_6 \vee x_2x_5\bar{x}_7$.

Глава 5

1 **а)** не сохраняет константу 0, сохраняет константу 1, нелинейная, несамодвойственная, немонотонная; **б)** не сохраняет константу 0, не сохраняет константу 1, нелинейная, несамодвойственная, монотонная; **в)** не сохраняет константу 0, не сохраняет константу 1, нелинейная, несамодвойственная, немонотонная; **г)** сохраняет константу 0, сохраняет константу 1, линейная, несамодвойственная, монотонная; **д)** не сохраняет константу 0, не сохраняет константу 1, линейная, самодвойственная, немонотонная; **е)** сохраняет константу 0, сохраняет константу 1, нелинейная, самодвойственная, немонотонная.

2 **а)** неполная, не базис; **б)** полная, базис; **в)** полная, не базис; **г)** полная, базис; **д)** неполная, не базис; **е)** полная, не базис.

Глава 6

1

а) $\begin{array}{cc} \begin{matrix} v_2 & v_4 & v_5 & v_8 \end{matrix} & \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_6 \\ v_7 \end{matrix} \end{array}$ **б)** $\begin{array}{cc} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_7 \end{matrix} & \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} v_3 \\ v_4 \\ v_6 \end{matrix} \end{array}$

в) $\begin{array}{cc} \begin{matrix} v_1 & v_3 & v_4 & v_5 & v_7 \end{matrix} & \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| & v_2 \end{array}$ **г)** $\begin{array}{cc} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{matrix} & \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| & v_5 \end{array}$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{array}{l} v_4 \\ v_6 \end{array} \qquad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{array}{l} v_6 \\ v_7 \end{array}$$

Глава 7

1 **а)** {1, 5}; **б)** {3, 4}; **в)** {1}; **г)** ∅; **д)** {2, 4}; е) ∅.

2 **а)** а; **б)** б, в, г, д, е; **в)** д; **г)** г, е.

3 **а)** $d(G) = 2$, $k(G) = 2$,

	1	2	3	4	5	6	
	aa	*a*	*ab*				1
	a	*aa bb*	*b*				2
$D(G) =$	*ba*	*b*	*bb*				3
				dd cc	*d*	*c*	4
				d	*dd*	*dc*	5
				c	*cd*	*cc*	6

б) $d(G) = 3$, $k(G) = 2$,

	1	2	3	5	4	6	
	aa dd	*a aaa dda abb*	*ab*	*d aad ddd*			1
	a aaa bba add	*aa bb*	*b aab bbb*	*ad*			2
$D(G) =$	*ba*	*b baa bbb*	*bb*	*bad*			3
	d daa ddd	*da*	*dab*	*dd*			5
					cc	*c ccc*	4
					c ccc	*cc*	6

в) $d(G) = 2$, $k(G) = 3$,

	1	2	3	4	5	6	
	aa	*a*	*ab*				1
	a	*aa bb*	*b*				2
$D(G) =$	*ba*	*b*	*bb*				3
				cc	*c*		4
				c	*cc*		5
							6

г) $d(G) = 2$, $k(G) = 1$,

	1	2	3	4	5	6	
	aa	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	*a*	1
	ba	*bb*	*bc*	*bd*	*be*	*b*	2
$D(G) =$	*ca*	*cb*	*cc*	*cd*	*ce*	*c*	3
	da	*db*	*dc*	*dd*	*de*	*d*	4
	ea	*eb*	*ec*	*ed*	*ee*	*e*	5
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*aa bb cc dd ee*	6

д) $d(G) = 2$, $k(G) = 2$,

$D(G) =$

	1	2	3	4	5	6	
	aa dd	*db*	*a*	*d*	*ac*		1
	bd	*bb ee*	*ec*	*b*	*e*		2
	a	*ce*	*aa cc*	*ad*	*c*		3
	d	*b*	*da*	*dd bb*	*be*		4
	ca	*e*	*c*	*eb*	*ee cc*		5
							6

е) $d(G) = 3$, $k(G) = 3$,

$D(G) =$

	1	2	3	5	4	6	
	aa	*a aaa abb*	*ab*	*abc*			1
	a aaa bba	*aa bb*	*b aab bbb bcc*	*bc*			2
	ba	*b baa bbb ccb*	*bb cc*	*c bbc ccc*			3
	cba	*cb*	*c cbb ccc*	*cc*			5
							4
							6

4 **а)** простой путь; **б)** сложный путь; **в)** сложный путь и составной путь; **г)** сложный путь и контур.

5 **а)** $d(G) = 3$, $k(G) = 2$

$D(G) =$

	1	2	3	5	4	6	
	abk	*a*	*ab*				1
	bk	*bka*	*b*				2
	k	*ka*	*kab*				3
	ck de	*dl cka dea*	*c dlb*	*dfg*	*d*	*df*	5
	e lbk	*l ea*	*lb eab fgc*	*fg*	*fgd*	*f*	4
	gck gde	*gdl*	*gc*	*g*	*gd*	*gdf*	6

б) $d(G) = 2$, $k(G) = 2$

$D(G) =$

	1	2	5	3	4	6	
		el	*e*	*fg*	*ed*	*f*	1
	a		*ae*	*b*	*m bc*	*af mk*	2
	la	*l*		*lb*	*d lm*	*dk*	5
					c	*ck*	3
				kg		*k*	4
				g	*gc*		6

в) $d(G) = 4$, $k(G) = 1$

1	2	3	4	5	6	
fme agme	*a fmea*	*ab fk agk*	*abc fkc*	*fm agm*	*f ag fmef*	1

$D(G) =$

			agkc	*abcd fkcd*	*abcl fkcl*	
gme bcde	*gmea*	*b gk bclk*	*bc gkc*	*gm bcd gkcd bclm*	*g bcl gmef gkcl*	2
cde clme	*cdea*	*clk*	*c clkc*	*cd clm*	*cl cdef*	3
de lme	*dea lmea*	*lk deab defk*	*lkc*	*d lm lkcd defm*	*l def lmef deag lkcl*	4
e efme	*ea*	*eab efk eagk*	*eabc efkc*	*efm eagm*	*ef eag*	5
me kcde	*mea*	*k meab mefk kclk*	*kc*	*m kcd mefm kclm*	*mef kcl meag*	6

г) $d(G) = 3$, $k(G) = 3$

$D(G) =$

1	2	3	4	5	6	
abf	*a*	*ab*	*abc*			1
bf	*bfa bcg*	*b*	*bc*			2
f	*fa cg*	*fab cgb*	*c*			3
gbf	*g*	*gb*	*gbc*			4
e	*ea dg*	*eab dgb*	*d*			5
k	*ka lg*	*kab lgb*	*l*			6

Глава 8

12 **а)** 3; **б)** 2; **в)** 2; **г)** 3.

а)

$$C_б(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccccc} \multicolumn{3}{c|}{\text{хорды}} & \multicolumn{5}{c}{\text{остов}} \\ d & e & f & a & b & c & g & h \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

б)

$$C_б(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccccc} \multicolumn{3}{c|}{\text{хорды}} & \multicolumn{5}{c}{\text{остов}} \\ b & c & h & a & d & e & f & g \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

в)

$$C_б(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccccc} \multicolumn{3}{c|}{\text{хорды}} & \multicolumn{5}{c}{\text{остов}} \\ a & c & h & b & d & e & f & g \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

г)

$$C_б(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \multicolumn{3}{c}{\text{хорды}} & \multicolumn{5}{c}{\text{остов}} \\ c & f & g & a & b & d & e & f \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}$$

3

а)

$$C(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{array}$$

б)

$$C(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

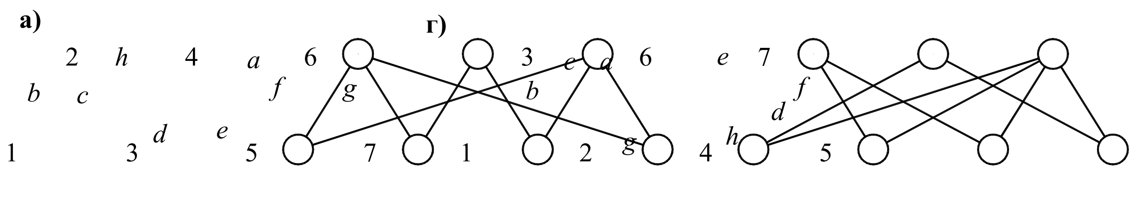
в)

$$C(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

г)

$$C(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{array}$$

4 **а)** да; **б)** нет; **в)** нет; **г)** да;



Глава 9

1 {а, б, г}, {в, д, з}, {е, ж, и}.

2 **а)** больше или равна 2; **б)** больше или равна 1; **в)** больше или равна 1.

3 **а)** {1, 5}, {1, 6}, {3, 4}, {5, 7}; **б)** {1, 3}, {2, 7}, {3, 7}, {4, 5}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 368 с. (Гл. 3, 6 – 9).

2 Бауэр Ф. Л., Гооз Г. Информатика. Вводный курс: В 2 ч. Пер. с нем. М.: Мир, 1990. Ч. 2. 423 с. (Гл. 1, 3).

3 Белов В. В., Воробьев Е. М., Шаталов В. Е. Теория графов: Учеб. пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1976. 392 с. (Гл. 1 – 3, 6 – 9).

4 Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977. 368 с. (Гл. 4, 5, 7, 9, 10).

5 Горбатов В. А. Основы дискретной математики: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: Высшая школа, 1986. 311 с. (Гл. 1 – 10).

6 Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988. 480 с. (Гл. 1 – 5, 8, 10).

7 Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2004. 302 с. (Гл. 1 – 9).

8 Оре О. Графы и их применение. Пер. с англ. М.: Мир, 1965. 174 с. (Гл. 3, 6 – 9).

9 Уилсон Р. Введение в теорию графов. Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 208 с. (Гл. 6, 8, 9).

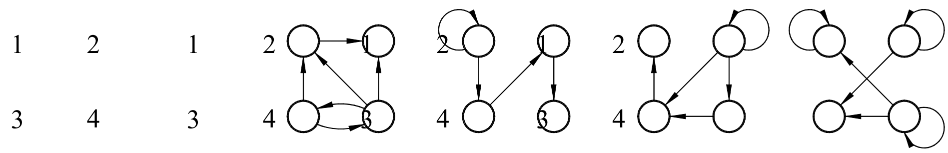
10 Харари Ф. Теория графов. Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 301 с. (Гл. 3, 6, 7, 8, 9).

Задачи к теме «Отношения. Способы задания и свойства. Понятие модели»

16 Представить перечислением элементов квадрат множества M: а) $M=\{1, 2\}$; б) $M=\{a, b, c\}$; в) $M=\{3, 4\}$; г) $M=\{d, e, f\}$.

17 Представить с помощью матрицы смежности бинарное отношение T в множестве $M=\{a, b, c, d\}$, заданное перечислением элементов: а) $T=\{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (d, d)\}$; б) $T=\{(a, c), (b, a), (b, d), (c, c), (c, d)\}$; в) $T=\{(a, b), (b, a), (b, d), (c, a), (d, b), (d, c)\}$; г) $T=\{(a, d), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$.

18 Представить перечислением элементов бинарное отношение T в множестве $M=\{1, 2, 3, 4\}$, заданное с помощью графа:



а) б) в) г)

19 Представить с помощью фактор-множества M/T бинарное отношение T в множестве $M=\{a, b, c\}$, заданное перечислением элементов: а) $T=\{(a, a), (b, b), (b, c), (c, a)\}$; б) $T=\{(b, a), (c, a), (c, b), (c, c)\}$; в) $T=\{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b)\}$; г) $T=\{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c)\}$.

20 Установить, является ли рефлексивным, антирефлексивным или нерефлексивным бинарное отношение T в множестве $M=\{1, 2, 3, 4\}$: а) $T=\{(1, 1), (2, 3), (4, 2), (4, 1), (4, 4)\}$; б) $T=\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$; в) $T=\{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$; г) $T=\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

21 Установить, является ли симметричным, антисимметричным или несимметричным бинарное отношение T в множестве $M=\{a, b, c, d\}$: а) $T=\{(a, a), (b, c), (b, d), (c, b), (d, b)\}$; б) $T=\{(a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (d, b)\}$; в) $T=\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, c)\}$; г) $T=\{(b, a), (b, c), (c, a), (c, c), (d, a)\}$.

22 Установить, является ли транзитивным, антитранзитивным или нетранзитивным бинарное отношение T в множестве $M=\{1, 2, 3, 4\}$: а) $T=\{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 3)\}$; б) $T=\{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 4)\}$; в) $T=\{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$; г) $T=\{(1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$.

23 Задать с помощью графа бинарное отношение в множестве $M=\{a, b, c, d\}$, являющееся одновременно: а) рефлексивным, симметричным и нетранзитивным; б) антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным; в) нерефлексивным, симметричным и антитранзитивным; г) рефлексивным, антисимметричным и антитранзитивным; д) антирефлексивным, несимметричным и нетранзитивным; е) нерефлексивным, несимметричным и транзитивным; ж) нерефлексивным, симметричным и транзитивным; з) рефлексивным, несимметричным и нетранзитивным.

24 Определить, является ли заданное в множестве $M=\{1, 2, 3, 4\}$ бинарное отношение T бинарным отношением упорядоченности $\leq$: а) $T=\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$; б) $T=\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$; в) $T=\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$; г) $T=\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 3), (4, 4)\}$; д) $T=\{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$; е) $T=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$; ж) $T=\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$; з) $T=\{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$.

25 Установить, является ли заданное с помощью матрицы смежности бинарное отношение в множестве $M=\{a, b, c, d\}$ отношением строгой упорядоченности $<$:

$$\text{а)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & & & 1 & \\ \hline b & & & & \\ \hline c & 1 & & & 1 \\ \hline d & & & 1 & \\ \hline \end{array} \qquad \text{б)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ \hline b & & & & \\ \hline c & & 1 & & 1 \\ \hline d & & 1 & & \\ \hline \end{array} \qquad \text{в)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & & & \\ \hline b & & & & \\ \hline c & 1 & & & \\ \hline d & 1 & & 1 & \\ \hline \end{array} \qquad \text{г)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & & 1 & & \\ \hline b & & & & \\ \hline c & 1 & 1 & & 1 \\ \hline d & & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{д)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ \hline b & & & 1 & 1 \\ \hline c & 1 & & & 1 \\ \hline d & & & & \\ \hline \end{array} \qquad \text{е)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & & & 1 & \\ \hline b & 1 & & 1 & 1 \\ \hline c & & & & \\ \hline d & 1 & & 1 & \\ \hline \end{array} \qquad \text{ж)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & & & & 1 \\ \hline b & & & & \\ \hline c & & & & \\ \hline d & & & & \\ \hline \end{array} \qquad \text{з)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ \hline b & & & 1 & \\ \hline c & 1 & & & \\ \hline d & & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

26 Установить, является ли заданное с помощью матрицы смежности бинарное отношение в множестве $M=\{a, b, c, d\}$ отношением эквивалентности:

$$\text{а)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & & \\ \hline b & 1 & 1 & & \\ \hline c & & & 1 & 1 \\ \hline d & & & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{б)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & \\ \hline b & & 1 & 1 & \\ \hline c & & 1 & 1 & \\ \hline d & & & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{в)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & \\ \hline b & 1 & 1 & & \\ \hline c & 1 & & 1 & \\ \hline d & & & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{г)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & & & \\ \hline b & & 1 & 1 & 1 \\ \hline c & & 1 & 1 & 1 \\ \hline d & & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{д)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & & & \\ \hline b & & 1 & 1 & \\ \hline c & & 1 & 1 & \\ \hline d & & & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{е)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & & 1 \\ \hline b & 1 & 1 & & 1 \\ \hline c & & & 1 & \\ \hline d & 1 & 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{ж)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & & & 1 \\ \hline b & 1 & 1 & & \\ \hline c & & 1 & 1 & \\ \hline d & 1 & & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{з)}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & & 1 & \\ \hline b & & 1 & & 1 \\ \hline c & 1 & & 1 & \\ \hline d & & 1 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

27 Определить число n классов эквивалентности и класс эквивалентности $K(a)$ элемента a в заданном в множестве $M=\{a, b, c, d\}$ бинарном отношении эквивалентности T: а) $T=\{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$; б) $T=\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b), (d, d)\}$; в) $T=\{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$; г) $T=\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$; д) $T=\{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$; е) $T=\{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}$; ж) $T=\{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, c), (d, d)\}$; з) $T=\{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c), (d, d)\}$.

28 Установить, является ли симметричным заданное 3-арное отношение T в множестве $M=\{1, 2, 3, 4\}$: а) $T=\{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 3, 4), (4, 3, 2)\}$; б) $T=\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2)\}$; в) $T=\{(2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2)\}$; г) $T=\{(1, 3, 4), (1, 4, 3), (3, 1, 4), (3, 4, 1), (4, 1, 3), (4, 3, 1), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (2, 4, 1)\}$; д) $T=\{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (1, 4, 2), (2, 4, 1)\}$; е) $T=\{(3, 4, 1), (4, 1, 3), (1, 3, 4), (3, 1, 4), (4, 3, 1), (1, 4, 3)\}$; ж) $T=\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2)\}$; з) $T=\{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$.

29 Представить с помощью модельного графа, гиперграфа и двудольного графа симметричное 3-арное отношение в множестве $M=\{a, b, c, d, e\}$, заданное матрицей инцидентности:

$$\text{а)}\ Q = \begin{array}{c} a\ b\ c\ d\ e \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \text{б)}\ \mathbf{Q} = \begin{array}{c} a\ b\ c\ d\ e \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a\ b\ c\ d\ e \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{Q}\ \begin{array}{c} a\ b\ c\ d\ e \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

в) $Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ г) $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$