Министерство образования РФ

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.И. Коршикова, Л.И. Калиниченко, И.С. Шабаршина

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Методические указания к курсу лекций по математическому анализу для студентов 2 курса механико-математического факультета РГУ

Ростов-на-Дону
2003 г.

Данные методические указания предназначены для студентов 2-го курса отделения "Математика" механико–математического факультета РГУ, составлены с учетом лекций по математическому анализу.

Методические указания печатаются в соответствии с решением кафедры математического анализа РГУ, протокол №   от   2003 г.

1 Числовой ряд и его сходимость

Определение 1.1 *Пусть* $\{a_n\}$ *— последовательность действительных чисел. Символ*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

называется числовым рядом. Слагаемые $a_1, a_2, \ldots$ *— членами ряда;* a_n*, отвечающее произвольному значению индекса* n*,— n-ным или общим членом ряда.*

Для обозначения ряда (1) также используют символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Определение 1.2 *Сумму n первых членов ряда (1)*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_n, \ n \in \mathbb{N},$$

называют n-ной частичной суммой ряда.

Согласно определению 1.2 числовой ряд (1) порождает последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда:

$$\begin{gathered} S_1 = a_1, \\ S_2 = a_1 + a_2, \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ \ldots\ldots\ldots \\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Определение 1.3 *Числовой ряд (1) называется сходящимся, если сходится последовательность* $\{S_n\}$ *его частичных сумм. Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и* $S = \lim S_n$*, то число* S *называют суммой ряда и пишут:*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Таким образом, символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно употреблять как для обозначения ряда (1), так и для обозначения его суммы, если он сходится.

Определение 1.4 *Ряд (1) называется расходящимся, если соответствующая ему последовательность $\{S_n\}$ расходится.*

Заметим, что если задана числовая последовательность $\{x_n\}$, то, полагая

$$a_1 = x_1, \quad a_2 = x_2 - x_1, \quad a_3 = x_3 - x_2, \ \dots, \ a_n = x_n - x_{n-1}, \ \dots,$$

получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, для которого n-ая частичная сумма равна

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Другими словами: для всякой числовой последовательности $\{x_n\}$ всегда можно указать числовой ряд, для которого $\{x_n\}$ — последовательность его частичных сумм. Это означает, что рассмотрение рядов эквивалентно рассмотрению соответствующих последовательностей.

Приведем несколько примеров, показывающих взаимоотношение понятий ряда, суммы ряда и предела последовательности.

Пример 1.1 *Рассмотрим ряд, членами которого являются члены геометрической прогрессии:*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots. \tag{2}$$

$\triangleright$ Его n-ная частичная сумма равна

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{если } q \neq 1; \\ n, & \text{если } q = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1. \end{cases}$$

Так как $\lim q^n = 0$ при $|q| < 1$, $\lim q^n = \infty$ при $|q| > 1$ и не существует предела последовательности $\{(-1)^n\}$, то

$$\lim S_n = \frac{1}{1-q}, \quad \text{если } |q| < 1,$$

$$\lim S_n = \infty, \quad \text{если } |q| > 1 \ \text{ или } q = 1.$$

Наконец, не существует предела последовательности $\{S_n\}$, если $q = -1$. Следовательно, ряд (2) сходится и его сумма равна $\dfrac{1}{1-q}$, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \geq 1$. $\triangleleft$

Пример 1.2 *Исследуем на сходимость числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$\triangleright$ Так как для данного ряда

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \quad \forall n > 1,$$

то $\lim S_n = +\infty$, а поэтому рассматриваемый ряд расходится. $\triangleleft$

В приведённых примерах последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм соответствующего ряда выражалась достаточно просто, что позволяло, пользуясь определением, установить сходимость или расходимость ряда. Чаще всего, однако, непосредственный анализ последовательности $\{S_n\}$ не представляется возможным, поэтому основной задачей в теории рядов является установление необходимых и достаточных условий сходимости ряда.

Наличие критерия Коши сходимости числовой последовательности позволяет установить соответствующий критерий и для числового ряда.

Теорема 1.1 (критерий Коши сходимости числового ряда) *Для сходимости числового ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа* ε *нашёлся номер* $N = N(\varepsilon)$ *такой, что для всех* $n > N$ *и любого* $p \in \mathbb{N}$ *выполнялось неравенство*

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon. \tag{3}$$

$\triangleright$ Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что величина, стоящая под знаком модуля в неравенстве (3), равна разности частичных сумм $S_{n+p} - S_n$. $\triangleleft$

Следствие 1.1.1 (необходимое условие сходимости ряда) *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то последовательность членов* $\{a_n\}$ *этого ряда является бесконечно малой.*

Замечание 1.1 *Стремление к нулю общего члена ряда не является достаточным условием сходимости ряда (см. пример 1.2).*

Замечание 1.2 *Критерий Коши из-за технических трудностей редко применяется для доказательства сходимости конкретного ряда, чаще он используется для доказательства сходимости одного ряда на основании сходимости другого или для установления расходимости ряда.*

Пример 1.3 *Покажем, используя критерий Коши, расходимость ряда*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

называемого гармоническим рядом.

$\triangleright$ Укажем такое положительное число ε_0, что для любого номера N найдётся пара натуральных чисел p и n, $n > N$, для которых имеет место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \geq \varepsilon_0. \tag{4}$$

Для каждого натурального n

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Положим $\varepsilon_0 = 1/2$. Тогда для произвольного $N \in \mathbb{N}$, если положить $n = N+1 > N$ и $p = n$, выполняется неравенство (4). Следовательно, гармонический ряд расходится. Поскольку последовательность его частичных сумм S_n является возрастающей, то $\lim S_n = +\infty$, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. $\triangleleft$

2 Простейшие свойства сходящихся рядов

Теорема 2.1 *Если $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходятся или расходятся одновременно и, в случае сходимости,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5}$$

(Числовой множитель $c \neq 0$ можно выносить за символ ряда, если последний является сходящимся.)

$\triangleright$ Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} ca_k$, $n \geq 1$. Тогда $\sigma_n = cS_n$, $\forall n \geq 1$. Поскольку $c \neq 0$, то последовательность $\{\sigma_n\}$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$, причём, в случае его существования,

$$\lim \sigma_n = c \lim S_n,$$

что доказывает теорему 2.1. $\triangleleft$

Теорема 2.2 *Пусть ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и их суммы равны соответственно* A *и* B. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ *сходится и его сумма равна* $A+B$.

$\triangleright$ Пусть $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k, B_n=\sum\limits_{k=1}^{n} b_k, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k), n\geq 1$. Тогда $S_n=A_n+B_n$. Так как $\lim A_n=A, \lim B_n=B$, где $A,B\in\mathbb{R}$, то числовая последовательность $\{S_n\}$ сходится и $\lim S_n=A+B$. $\triangleleft$

Определение 2.1 *Ряд, полученный из ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *отбрасыванием первых* m *его членов, т. е. ряд* $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$, *называют* m*-ым остатком данного ряда.*

Теорема 2.3 *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6}$$

сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток ряда (6) сходится, то ряд (6) сходится.

$\triangleright$ Пусть $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — частичные суммы ряда (6), а $\sigma_n^{(m)}=\sum\limits_{k=m+1}^{m+n} a_k$ — n-ая частичная сумма m-ого остатка. Очевидно, что $S_{n+m}=S_m+\sigma_n^{(m)}$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$. Если ряд (6) сходится, то сходится последовательность $\{S_n\}$. Пусть $\lim S_n=S\in\mathbb{R}$. В силу свойств сходящихся последовательностей существует $\lim\limits_{n\to 0} S_{n+m}=S, \ \forall\ m\in\mathbb{N}$, а поэтому сходится последовательность $\{\sigma_n^{(m)}\}$ при каждом $m\in\mathbb{N}$, причём $\lim\limits_{n\to 0}\sigma_n^{(m)}=S-S_m$. Итак, m- тый остаток ряда (6) сходится и его сумма равна $S-S_m$.

Пусть сходится m_0 остаток ряда (6), т. е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^{(m_0)}=\sigma^{(m_0)}\in\mathbb{R}$. В силу предыдущего $S_{n+m_0}=S_{m_0}+\sigma_n^{(m_0)}$, поэтому последовательность $\{S_{n+m_0}\}$ сходится, а значит, сходится последовательность $\{S_n\}$, т. е. сходится ряд (6) и его сумма $S=S_{m_0}+\sigma^{(m_0)}$. $\triangleleft$

Следствие 2.3.1 *Отбрасывание или присоединение к данному ряду любого конечного числа членов не влияет на его сходимость или расходимость.*

3 Сходимость положительных рядов

Определение 3.1 *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называют знакопостоянным, если либо* $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *либо* $a_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. *В первом случае ряд называют положительным, во втором — отрицательным. Если* $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *то ряд (6) называют строго положительным.*

Теорема 3.1 *Положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху, то есть* $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \;\; S_n \leq M$.

$\triangleright$ Если числовой ряд сходится, то по определению 1.2 последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится, поэтому ограничена и, в частности, ограничена сверху.

Пусть теперь последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху. Поскольку $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, и

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \;, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то последовательность $\{S_n\}$ не убывает. Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ сходится и $\lim S_n = \sup\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, что доказывает сходимость ряда (6). $\triangleleft$

Замечание 3.1 *Если положительный ряд сходится и* S *— его сумма, то* $S_n \leq S, \forall n \in \mathbb{N}$.

Следствие 3.1.1 *Если положительный ряд (6) расходится, то* $\lim S_n = +\infty$.

(В последнем случае часто пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.)

Теорема 3.2 (признак сравнения) *Пусть положительные ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{7}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{8}$$

таковы, что $a_n \leq b_n, \forall n \geq 1$. *Если ряд (8) сходится, то ряд (7) сходится. Если же ряд (7) расходится, то ряд (8) расходится.*

$\triangleright$ Пусть A_n и B_n — n-ые частичные суммы рядов (7) и (8) соответственно. Тогда $A_n \le B_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Если ряд (8) сходится, то по теореме 3.1 последовательность $\{B_n\}$ ограничена сверху. Поэтому $\{A_n\}$ ограничена сверху и ряд (7) сходится.

Пусть ряд (7) расходится. Предположим, что ряд (8) сходится. Тогда, согласно доказанной первой части, ряд (7) сходится, что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно и ряд (8) расходится. $\triangleleft$

Теорема 3.3 (признак сравнения в предельной форме) *Пусть ряд (7) является положительным, а ряд (8) — строго положительным, $\ell = \varliminf_{n\to\infty} a_n/b_n$, $L = \varlimsup_{n\to\infty} a_n/b_n$. Если $L < +\infty$, то из сходимости ряда (8) следует сходимость ряда (7). Если $\ell > 0$, то из расходимости ряда (8) следует расходимость ряда (7).*

$\triangleright$ Пусть $L < +\infty$ и ряд (8) сходится. По числу $\varepsilon = 1 > 0$ найдём номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\frac{a_n}{b_n} < L + 1.$$

Тогда $\forall n > N$

$$a_n < (L+1)b_n.$$

Отсюда, в силу теорем 2.1, 2.3 и 3.2 сходится ряд (7).

Пусть теперь $\ell > 0$ и ряд (8) расходится. Если $\ell \in \mathbb{R}$, то по числу $\varepsilon = \ell/2$ найдётся номер N такой, что для всех $n > N$

$$\frac{a_n}{b_n} > \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2},$$

т. е. $a_n > (\ell/2)b_n$ $\forall n > N$. Отсюда, с учётом теоремы 3.2, следует расходимость ряда (7).

Если $\ell = +\infty$, то найдётся такой номер N, что $\forall n > N$

$$\frac{a_n}{b_n} > 1,$$

а поэтому ряд (7) расходится. $\triangleleft$

Замечание 3.2 *Если $L = +\infty$, то не обязательно из сходимости ряда (8) следует сходимость ряда (7). Подтверждением являются, например, ряды с общими членами $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n^2$, $n \in \mathbb{N}$.*

Замечание 3.3 *Если $\ell = 0$, то из расходимости ряда (8) не следует, вообще говоря, расходимость ряда (7).*

Следствие 3.3.1 *Если ряды (7) и (8) таковы, что существует $\lim a_n/b_n = c$, то при $c < +\infty$ из сходимости ряда (8) следует сходимость ряда (7), при $c > 0$ из расходимости ряда (8) следует расходимость ряда (7).*

Следствие 3.3.2 *Если ряды (7) и (8) таковы, что существует $\lim a_n/b_n = c \in (0; +\infty)$, то ряды (7) и (8) сходятся или расходятся одновременно.*

Ряды, удовлетворяющие условиям следствия (3.3.2), называют равносходящимися. В частности, если $a_n \sim b_n$, при $n \to \infty$, то ряды (7) и (8) являются равносходящимися.

Теорема 3.4 (интегральный признак Маклорена-Коши сходимости ряда) *Если функция f определена на промежутке $[1; +\infty)$, неотрицательна и не возрастает, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{9}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится числовая последовательность $\{F(n)\}$, где $F(n) = \int\limits_1^n f(t)dt, n \in \mathbb{N}$.

$\triangleright$ Прежде всего заметим, что функция f монотонна на отрезке $[1; n], \forall n \geq 2$, поэтому интегрируема на нём, а значит,

$$F(n) \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $f(t) \geq 0, \forall t \in [1; +\infty)$, то $\forall n \in \mathbb{N}$

$$F(n+1) - F(n) = \int\limits_1^{n+1} f(t)dt - \int\limits_1^{n} f(t)dt = \int\limits_n^{n+1} f(t)dt \geq 0,$$

т. е. числовая последовательность $\{F(n)\}$ является неубывающей.
Следовательно, существует конечный или бесконечный (именно $+\infty$) предел

$$\lim F(n) = \sup\{F(n) | n \in \mathbb{N}\}.$$

Рассмотрим вспомогательный ряд

$$(F(2) - F(1)) + \dots + (F(n+1) - F(n)) + \dots \tag{10}$$

Поскольку функция f не возрастает на $[1; +\infty)$, то $\forall t \in [n; n+1]$

$$f(n) \geq f(t) \geq f(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и

$$f(n+1) = \int\limits_{n}^{n+1} f(n+1)dt \leq F(n+1) - F(n) \leq \int\limits_{n}^{n+1} f(n)dt = f(n),$$

т. е. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(n+1) \leq F(n+1) - F(n) \leq f(n).$$

В силу признака сравнения ряды (9) и (10) сходятся или расходятся одновременно. Поскольку n-ная частичная сумма ряда (10) равна $F(n+1) - F(1) = F(n+1)$, то ряд (10), а значит и ряд (9), сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел числовой последовательности $\{F(n)\}$. $\triangleleft$

Пример 3.1 *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

$\triangleright$ При $\alpha \leq 0$ общий член ряда $a_n = n^{-\alpha} \not\to 0$, поэтому ряд (11) расходится. При $\alpha > 0$ функция $f(x) = x^{-\alpha}$ определена, убывает на множестве $[1; +\infty)$ и $f(n) = n^{-\alpha} = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. В данном случае

$$F(n) = \int\limits_{0}^{n} x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_{1}^{n}, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \ln x \,\Big|_{1}^{n}, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1), & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \ln n, & \text{если } \alpha = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Следовательно, в силу признака Маклорена–Коши ряд (11) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. $\triangleleft$

Теорема 3.5 (признак Коши, непредельная форма) *Пусть ряд (7) положителен и* $K_n = \sqrt[n]{a_n}$, $\forall n \geq 2$. *Если существует такое число* $q \in (0;1)$, *что* $K_n \leq q$, $\forall n \geq n_0$, *то ряд (7) сходится. Если же существует подпоследовательность* $\{K_{n_k}\}$ *такая, что* $K_{n_k} \geq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, *то ряд (7) расходится.*

$\triangleright$ Пусть существует число $q \in (0;1)$ такое, что $K_n \leq q$, $\forall n \geq n_0$, т.е. $a_n \leq q^n$, $\forall n \geq n_0$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q \in (0;1)$, то в силу признака сравнения 3.2 ряд (7) сходится.

Если существует подпоследовательность $\{K_{n_k}\}$ такая, что $K_{n_k} \geq 1$, то $a_{n_k} \geq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{a_n\}$ не является бесконечно малой. Поэтому ряд (7) расходится (см. следствие 1.1.1 теоремы 1.1). $\triangleleft$

Теорема 3.6 (признак Коши, предельная форма) *Пусть ряд (7) положителен и* $K = \overline{\lim} K_n$. *Если* $K < 1$, *то ряд (7) сходится; если* $K > 1$, *то ряд (7) расходится. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых* $K = 1$.

$\triangleright$ Пусть $\overline{\lim} K_n = K < 1$. Тогда по числу $\varepsilon_0 = \frac{1-K}{2} > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$

$$K_n < K + \varepsilon_0 = \frac{1+K}{2} < 1.$$

Отсюда по теореме 3.5 ($q = \frac{1+K}{2} < 1$) следует сходимость ряда (7).

Если $K \in (1; +\infty)$, то по числу $\varepsilon_0 = K - 1 > 0$ найдётся подпоследовательность $\{K_{n_k}\}$ такая, что $\forall k \in \mathbb{N}$

$$K_{n_k} > K - \varepsilon_0 = 1.$$

Значит, ряд (7) расходится. Если же $K = +\infty$, то найдётся бесконечно большая подпоследовательность $\{K_{n_k}\}$ и ряд (7) расходится в силу теоремы 3.5.

Наконец, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ соответствующие $K_n \to 1$, однако, первый ряд расходится, а второй сходится. $\triangleleft$

Теорема 3.7 (признак Даламбера, непредельная форма) *Пусть ряд (7) является строго положительным и* $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \geq 1$. *Если существует такое число* $q \in (0;1)$, *что* $D_n \leq q$, $\forall n \geq n_0$, *то ряд (7) сходится. Если* $D_n \geq 1$, $\forall n \geq n_0$, *то ряд (7) расходится.*

$\triangleright$ Поскольку первые члены ряда не влияют на сходимость, то можно считать, что $n_0 = 1$. Пусть для ряда (7) существует $q \in (0;1)$ такое, что $D_n \le q$, $\forall n \ge 1$. Тогда имеют место неравенства:

$$\frac{a_2}{a_1} \le q,\ \frac{a_3}{a_2} \le q,\ \ldots,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q,\quad n \in \mathbb{N},$$

перемножив которые получим:

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \le q^n,\quad \forall n \ge 1,$$

т.е. $a_{n+1} \le a_1 q^n,\quad \forall n \ge 1$.

Учитывая пример 1.1 и теоремы 2.1 и 3.2, получим сходимость ряда (7).

Если же $D_n \ge 1$, $\forall n \ge n_0$, то $\{a_n\}$ не убывает, а значит $a_n \not\to 0$ и ряд (7) расходится. $\triangleleft$

Теорема 3.8 (признак Даламбера, предельная форма) *Пусть ряд (7) строго положительный. Если $\overline{\lim}\, D_n = D < 1$, то ряд (7) сходится. Если $\underline{\lim}\, D_n = d > 1$, то ряд (7) расходится. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых*

$$\underline{\lim}\, D_n \le 1 \le \overline{\lim}\, D_n.$$

Доказательство этого утверждения предоставляем читателю.

Следствие 3.8.1 *Если ряд (7) является строго положительным и существует*

$$\lim D_n = D,$$

то при $D > 1$ ряд (7) расходится, при $D < 1$ ряд (7) сходится. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $D = 1$.

Пример 3.2 *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n}.$$

$\triangleright$ Заметим, что

$$D_n = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} \to 1,$$

поэтому по признаку Даламбера в предельной форме ничего определённого о сходимости данного ряда сказать нельзя. Однако, учитывая монотонное возрастание последовательности $(1+\frac{1}{n})^n$, получим, что последовательность $\{D_n\}$ монотонно убывая стремится к 1, т.е. $D_n > 1$, $\forall n \ge 1$. Последнее означает расходимость ряда (см. признак Даламбера в непредельной форме). $\triangleleft$

Замечание 3.4 *Признак Коши в предельной форме "сильнее"соответствующего признака Даламбера в следующем смысле. Если признак Даламбера указывает на сходимость данного ряда, то признак Коши также укажет на его сходимость, но не наоборот.*

Подтверждением последнему является ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots.$$

Замечание 3.5 *Если при исследовании положительного ряда доказана с помощью признака Даламбера (или Коши) расходимость его, то общий член этого ряда не является бесконечно малым, то есть нарушено необходимое условие сходимости ряда.*

Замечание 3.6 *Признаки Коши и Даламбера основаны на сравнении исследуемого ряда с рядом геометрической прогрессии и не дают ответа на вопрос о поведении ряда, если общий член его стремится к нулю медленнее, чем последовательность вида $\{q^n\}$, $q \in (0;1)$. В последнем случае бывает полезна*

Теорема 3.9 (признак Раабе) *Пусть ряд (7) является строго положительным и $R_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Если существует предел $\lim R_n = R$, то при $R > 1$ ряд (7) сходится, а при $R < 1$ ряд (7) расходится.*

Заметим, что если существует предел $\lim D_n = D$ и $D < 1$, то для R_n существует предел $R = +\infty$, а если $D > 1$, то $R = -\infty$. Таким образом, если признак Даламбера дает ответ о поведении ряда (7), то признак Раабе и подавно его дает, т.е. признак Раабе "сильнее" признака Даламбера в предельной форме.

Пример 3.3 *Исследуем сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},\ \alpha > 0.$$

$\rhd$ Так как $D_n = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и $\lim D_n = 1$, то признаки Даламбера не дают ответа о сходимости данного ряда. Но $R_n = n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = n\left(\alpha\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \alpha + o(1) \to \alpha$ при $n \to +\infty$. Поэтому в силу теоремы 3.9 данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$. $\lhd$

Теорема 3.10 (признак Гаусса) *Пусть числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *строго положителен и*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где μ *— некоторое число,* $\{\theta_n\}$ *— ограниченная последовательность. Тогда ряд сходится, если* $\mu > 1$, *и расходится, если* $\mu \leq 1$.

Познакомиться с доказательством признака Гаусса можно, например, в [5], стр. 279.

Пример 3.4 *Исследуем сходимость ряда*

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p + \cdots, \quad p > 0.$$

$\triangleright$ Поскольку $\forall n \geq 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^p,$$

то ничего определённого о сходимости данного ряда по признаку Даламбера сказать нельзя. Но по формуле Тейлора

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-p} = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p\,(p+1)}{2!}\frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty.$$

Отсюда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p/2}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где

$$\theta_n = \frac{p\,(p+1)}{4\cdot 2!} + \frac{o\,(1/n^2)}{1/n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому последовательность $\{\theta_n\}$ ограничена и в силу признака Гаусса исследуемый ряд сходится при $p > 2$ и расходится при $p \leq 2$. $\triangleleft$

4 Знакопеременные ряды, их сходимость.

Определение 4.1 *Числовой ряд называется знакопеременным, если у него бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов.*

Начнем с преобразования Абеля, которое часто бывает полезным.

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \tag{12}$$

где $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через S_n n-ые частичные суммы ряда (12), а через B_n—n-ые частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Если положить $B_0 = 0$, то $b_n = B_n - B_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Выразим S_n через a_k и B_k.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.$$

Это преобразование n-ой частичной суммы ряда (12) называют преобразованием Абеля.

Лемма 4.1 (Абеля) *Если числовая последовательность $\{a_n\}$ не убывает (или не возрастает), а последовательность $\{B_n\}$ ограничена, т.е. $|B_n| \leq B$, $\forall n \geq 1$, то*

$$|S_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq B(|a_1| + 2|a_n|), \quad \forall n \geq 1.$$

$\triangleright$ В силу преобразования Абеля

$$|S_n| \leq |\sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1})| + |a_n||B_n| \leq B(\sum_{k=1}^{n} |a_k - a_{k+1}| + |a_n|).$$

Поскольку разности $a_k - a_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n$, имеют один и тот же знак, то

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k - a_{k+1}| = |\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})| = |a_1 - a_n| \leq |a_1| + |a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$|S_n| \leq B(|a_1| + 2|a_n|), \quad \forall n \geq 1.$$

$\triangleleft$

Теорема 4.1 (признак Дирихле) *Пусть в ряде (12) последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность $\{B_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена, тогда ряд (12) сходится.*

$\triangleright$ Доказательство проведём с помощью критерия Коши сходимости числового ряда. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Оценим сверху

$$|\sum_{k=1}^{p} a_{k+n} b_{k+n}|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{N},$$

применив к этой сумме лемму 4.1. Для этого заметим, что

$$|\sum_{k=1}^{p} b_{k+n}| = |B_{n+p} - B_n| \le |B_{n+p}| + |B_n| \le 2B, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Имеем:

$$|\sum_{k=1}^{p} a_{k+n} b_{k+n}| \le 2B(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|), \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно малой, то существует такое $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Поэтому

$$|\sum_{k=1}^{p} b_{n+k} a_{n+k}| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N.$$

Последнее означает сходимость ряда (12). $\triangleleft$

Теорема 4.2 (признак Абеля) *Если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд (12) сходится.*

$\triangleright$ По условию последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, поэтому является сходящейся. Положим, что $a = \lim a_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, поэтому последовательность его частичных сумм $\{B_n\}$ ограничена. Поскольку

$$a_n b_n = (a_n - a) b_n + a b_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

то ряд (12) является суммой рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a b_n$, первый из которых сходится по теореме 4.1 (признак Дирихле), а второй — по теореме 2.1. Согласно теореме 2.2 ряд (12) сходится. $\triangleleft$

Замечание 4.1 *Признаки Дирихле и Абеля нецелесообразно применять к положительным рядам.*

Пример 4.1 *Исследуем на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha n}{n}, \quad \textit{где } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

$\triangleright$ Прежде всего заметим, что при $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sin \alpha n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, поэтому ряд (13) сходится.

Если $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, то $\forall n \in \mathbb{N}$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin k\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} (\cos(k - \frac{1}{2})\alpha - \cos(k + \frac{1}{2}\alpha)) = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} (\cos\frac{\alpha}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, 2\, \sin\frac{n+1}{2}\,\alpha \sin\frac{n\alpha}{2},$$

откуда $|B_n| \leq \dfrac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Поскольку последовательность $\{a_n\}$: $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, является монотонной бесконечно малой, то ряд (13) сходится по признаку Дирихле при $\alpha \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, ряд (13) сходится для $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. $\triangleleft$

5 Ряд лейбницевского типа и его свойства

Определение 5.1 *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется знакочередующимся, если любые два соседних члена его имеют противоположные знаки, т. е.* $sgn(a_n \cdot a_{n+1}) = -1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что знакочередующийся ряд всегда можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \ \text{ или } \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \ \text{ где } a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Мы в последующем будем рассматривать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n. \tag{14}$$

Теорема 5.1 (признак Лейбница) *Знакочередующийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, *модули членов которого образуют монотонную бесконечно малую последовательность, сходится, его сумма неотрицательна и не превосходит первого члена* a_1.

$\triangleright$ Поскольку $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{a_n\}$ является монотонной бесконечно малой. Частичные суммы B_n числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ образуют ограниченную последовательность. Следовательно, ряд (14) сходится по признаку Дирихле.

Оценим сумму ряда (14), рассмотрев подпоследовательности $\{S_{2n}\}$ и $\{S_{2n+1}\}$, $n \in \mathbb{N}$, его частичных сумм. Так как

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}), \quad n \in \mathbb{N},$$

и $a_{2k-1} - a_{2k} \geq 0,\ k = 1, \ldots, n-1$, то $S_{2n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, а поэтому $S = \lim S_{2n} \geq 0$.

Поскольку $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} > 0$,

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

и $a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0,\ k = 1, \ldots, n$, то $S_{2n+1} \leq a_1, \forall n \in \mathbb{N}$, поэтому $S = \lim S_{2n+1} \leq a_1$. $\triangleleft$

Определение 5.2 *Знакочередующийся ряд, модули членов которого образуют монотонную бесконечно малую последовательность, называется рядом лейбницевского типа.*

С учётом определения 5.2 теорема 5.1 принимает вид.

Теорема 5.2 *Ряд лейбницевского типа сходится.*

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 5.2.1 *Сумма* $\sigma^{(n)}$ *n-го остатка ряда лейбницевского типа (14) по модулю не превосходит модуля его первого члена, т.е.* $|\sigma^{(n)}| \leq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 5.1 *Ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *является, очевидно, рядом лейбницевского типа, поэтому сходится и*

$$|\sigma^{(n)}| \leq a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

т.е. замена суммы S *ряда величиной n-ой частичной суммы его допускает абсолютную погрешность, равную* $|\sigma^{(n)}|$, *которая не превосходит* $\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

6 Абсолютная и условная сходимость ряда

Лемма 6.1 *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

$\triangleright$ Доказательство утверждения следует из критерия Коши сходимости числового ряда. $\triangleleft$

Замечание 6.1 *Обратное утверждение неверно.*

Действительно, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится, а ряд из модулей членов его расходится.

Определение 6.1 *Числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{15}$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{16}$$

Если же ряд (16) расходится, а ряд (15) сходится, то говорят, что ряд (15) сходится условно (не абсолютно).

С учётом определения 6.1 лемма 6.1 принимает вид :

Лемма 6.2 *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Следствие 6.0.2 *Для знакопостоянного числового ряда понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.*

Пример 6.1 *Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}_+. \tag{17}$$

$\triangleright$ Так как $\dfrac{|\sin n|}{n^p} \leq \dfrac{1}{n^p}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$, то ряд (17) абсолютно сходится при $p > 1$. Если же $p \in (0; 1]$, то

$$\frac{|\sin n|}{n^p} \geq \frac{1 - \cos 2n}{2n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2n}{2n^p}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^p}$ расходится при $p \in (0;1]$ (см. пример 3.1), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{2n^p}$ сходится при $p \in (0;1]$ (по признаку Дирихле), то согласно теореме 2.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-\cos 2n}{2n^p}$ расходится. Поэтому при $p \in (0;1]$ расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^p},$$

т.е. ряд (17) не является абсолютно сходящимся при $p \in (0;1]$.

Применяя к ряду (17) признак Дирихле, убеждаемся в его сходимости, а значит в условной сходимости при $p \in (0;1]$. $\triangleleft$

7 Свойства сходящихся рядов

Понятие суммы ряда существенно отличается от суммы конечного числа слагаемых, поскольку в первом использован предельный переход. Поэтому известные свойства суммы чисел переносятся на сумму ряда не полностью: некоторые из свойств выполняются только при определённых условиях.

Изучим свойства числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{18}$$

Объединим его члены произвольным образом в группы, не меняя при этом порядка их следования, получим ряд

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots + \tag{19}$$
$$+(a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}) + \cdots$$

Теорема 7.1 (сочетательное свойство сходящегося ряда) *Если ряд (18) сходится, то ряд (19), полученный из (18) произвольной группировкой его членов без нарушения порядка следования, сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (18).*

$\triangleright$ Пусть S_n— n-ная частичная сумма ряда (18), σ_k— k-ая частичная сумма ряда (19). Тогда $\sigma_k = S_{n_k}$. Поскольку последовательность $\{S_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{S_n\}$, то из сходимости ряда (18) имеем :

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k} = \lim S_n,$$

что означает не только сходимость ряда (19), но и равенство сумм рядов (19) и (18). $\triangleleft$

Следствие 7.1.1 *Обратное утверждение неверно, т.е. из сходимости ряда (19), вообще говоря, не следует сходимость ряда (18).*

Подтверждением сказанного являются ряды

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

и

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

Однако справедлива

Теорема 7.2 *Если внутри каждой скобки ряда (19) все члены имеют один и тот же знак, то из сходимости ряда (19) следует сходимость ряда (18).*

Доказательство этого факта предоставим читателю ([5], стр. 314).

Пример 7.1 *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[n/3]}}{n}. \tag{20}$$

$\triangleright$ Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right), \tag{21}$$

полученный из (20) отбрасыванием первых двух членов и группировкой последовательных членов одного знака. Ряд (21), очевидно, является рядом лейбницевского типа, поэтому сходится, а значит, согласно теореме 7.2, сходится ряд (20). $\triangleleft$

Выясним, обладают ли сходящиеся ряды переместительным свойством.

Часто биективное отображение $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ называют перестановкой. Ряд, полученный из (18) с помощью перестановки $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\sigma(k)=n_k$, $k\in\mathbb{N}$, его членов, принимает вид :

$$a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}+\cdots+a_{n_k}+\cdots \tag{22}$$

Теорема 7.3 *Если положительный числовой ряд (18) сходится, то ряд (22), полученный из (18) с помощью перестановки σ, сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (18).*

$\triangleright$ Пусть S_n и U_k— частичные суммы рядов (18) и (22) соответственно, т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$U_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

По условию ряд (18) является положительным сходящимся, поэтому, если S— сумма ряда (18), то по замечанию к теореме 3.1 имеем:

$$S_n \leq S, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если $p_k = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$U_k \leq S_{p_k} \leq S, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

т.е.

$$U_k \leq S, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда по теореме 3.1 и замечанию к ней ряд (22) сходится и его сумма U удовлетворяет условию $U \leq S$. Учитывая, что ряд (18) получен из (22) перестановкой σ^{-1}, получим, в силу доказанного, что $S \leq U$. Значит $S = U$. $\triangleleft$

Рассмотрим теперь знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Положим

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n > 0, \\ 0, & \text{если } a_n \leq 0, \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n, & \text{если } a_n < 0, \\ 0, & \text{если } a_n \geq 0. \end{cases}$$

Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \tag{23}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{24}$$

являются положительными. Поскольку нулевые члены не влияют на сходимость и величину суммы ряда, то их можно опустить. Если положительные члены ряда (18) образуют последовательность $\{a_{n_k}\}$, а отрицательные — $\{a_{m_k}\}$, то ряды (23) и (24) принимают вид : $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{m_k}^-$ соответственно. Заметим, что эти ряды сходятся или расходятся одновременно с рядами (23), (24) соответственно.

Теорема 7.4 *Для знакопеременного ряда (18) справедливы следующие утверждения:*

1) *ряд (18) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$*,* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{m_k}$*;*

2) *если один из рядов (23) или (24) сходится, а другой расходится, то ряд (18) расходится;*

3) *если ряд (18) сходится условно, то ряды (23) и (24) расходятся.*

$\triangleright$ 1). Пусть S_n, σ_n^+, σ_n^- – n-ые частичные суммы рядов (18), (23), (24) соответственно. Так как ряд (18) абсолютно сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если S_n^* – n-ая частичная сумма последнего ряда, то существует число $M > 0$ такое, что

$$S_n^* \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Но $S_n^* = \sigma_n^+ + \sigma_n^-$, $\forall n \in \mathbb{N}$, поэтому

$$\sigma_n^+ \leq M, \ \ \sigma_n^- \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

что означает сходимость рядов (23) и (24), а значит, и рядов, составленных из положительных и отрицательных членов.

Докажем обратное утверждение. Пусть ряды (23) и (24) сходятся. По теореме 3.1 существуют числа $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ такие, что

$$\sigma_n^+ \leq M_1, \ \ \sigma_n^- \leq M_2, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$S_n^* = \sigma_n^+ + \sigma_n^- \leq M_1 + M_2, \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

и ряд (18) сходится абсолютно.

2). Пусть ряд (23) сходится, а ряд (24) расходится. Тогда по теореме 3.1 и её следствию существует $M_1 > 0$ такое, что $\sigma_n^+ \leq M_1, \forall n \in \mathbb{N}$, а $\sigma_n^- \to +\infty$. Далее,

$$S_n = \sigma_n^+ - \sigma_n^-, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

поэтому последовательность $\{S_n\}$ является бесконечно большой и ряд (18) расходится.

3). Пусть ряд (18) сходится условно. Предположим, что ряды (23) и (24) не являются одновременно расходящимися. Тогда, если эти ряды одновременно сходятся, по доказанной 1-ой части ряд (18) абсолютно сходится, что противоречит условию. Если же один из рядов (23), (24) сходится, а второй расходится, то по доказанной 2-ой части этой теоремы ряд (18) расходится, что также противоречит условию. Следовательно, ряды (23) и (24) расходятся. $\triangleleft$

Теорема 7.5 (Коши) *Если ряд (18) абсолютно сходится, то ряд (22), полученный из (18) произвольной перестановкой его членов, абсолютно сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (18).*

$\triangleright$ По условию ряд (18) абсолютно сходится, поэтому по теореме 7.3 сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}|$, соответствующий ряду (22), а значит ряд (22) абсолютно сходится. Докажем, что суммы рядов (18) и (22) совпадают. В силу теоремы 7.4 ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^-$$

сходятся. Поскольку последние ряды положительны, то по теореме 7.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^-.$$

Наконец, так как $a_k = a_k^+ - a_k^-, k \geq 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^- = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k}^+ - a_{n_k}^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}.$$

$\triangleleft$

Покажем теперь, что условно сходящиеся ряды переместительным свойством не обладают : в каждом таком ряде с помощью перестановки членов можно изменить сумму и даже нарушить сходимость.

Теорема 7.6 (Римана) *Если ряд (18) условно сходится, то для любого* $L \in [-\infty; +\infty]$ *существует такая перестановка его членов, что при* $L \in (-\infty; \infty)$ *соответствующий ряд (22) сходится и его сумма равна* L*, а при* $L = +\infty$ *или* $L = -\infty$ *соответствующий ряд (22) расходится, и последовательность его частичных сумм является соответственно положительной или отрицательной бесконечно большой.*

$\triangleright$ 1). Пусть $L=+\infty$. Так как ряд (18) условно сходится, то согласно теореме 7.4 ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся. Удалим в этих рядах нулевые элементы, получим соответственно

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+ \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k}^-;$$

последовательности частичных сумм этих рядов являются положительными бесконечно большими. Следовательно,

$$\exists p_1 \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{p_1} a_{n_k}^+ > 1 + a_{m_1}^-;$$

$$\exists p_2 \in \mathbb{N}, p_2 > p_1 : \sum_{k=p_1+1}^{p_2} a_{n_k}^+ > 1 + a_{m_2}^-;$$

$$\exists p_3 \in \mathbb{N}, p_3 > p_2 : \sum_{k=p_2+1}^{p_3} a_{n_k}^+ > 1 + a_{m_3}^-,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Рассмотрим ряд

$$a_{n_1}^+ + \dots + a_{n_{p_1}}^+ - a_{m_1}^- + a_{n_{p_1+1}}^+ + \dots + a_{n_{p_2}}^+ - a_{m_2}^- + a_{n_{p_2+1}}^+ + \cdots \tag{25}$$

Покажем, что ряд (25) искомый. В силу выбора последовательности $\{p_k\}$ частичные суммы V_k ряда (25) обладают свойствами :

$$V_{p_k+1} > k, \text{ и } V_{p_k} > k + a_{m_k} > k, \ \forall k \in \mathbb{N};$$
$$\forall n \in (p_k+1, p_{k+1}) \quad V_{p_k+1} < V_n < V_{p_{k+1}};$$

Поэтому последовательность $\{V_n\}$ является положительной бесконечно большой и ряд (25) расходится. Аналогично рассматривается ситуация $L=-\infty$.

2). Пусть теперь L— положительное число.Согласно теоремы 7.4 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+$ расходится. Поэтому найдётся $p_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$a_{n_1}^+ + a_{n_2}^+ + \dots + a_{n_{p_1}}^+ > L,$$

но

$$a^+_{n_1} + a^+_{n_2} + \dots + a^+_{n_{p_1-1}} \le L.$$

(Если $a^+_{n_1} > L$, то будем считать $p_1 = 1$). Сумму $\sum\limits_{k=1}^{p_1} a^+_{n_k}$ возьмём в качестве первого члена вспомогательного ряда. Для построения второго члена этого ряда из первого члена будем последовательно вычитать члены положительного расходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a^-_{m_k}$ до тех пор, пока не получим неравенство

$$(a^+_{n_1} + a^+_{n_2} + \dots + a^+_{n_{p_1}}) - (a^-_{m_1} + a^-_{m_2} + \dots + a^-_{m_{q_1}}) \le L,$$

но

$$(a^+_{n_1} + a^+_{n_2} + \dots + a^+_{n_{p_1}}) - (a^-_{m_1} + a^-_{m_2} + \dots + a^-_{m_{q_1-1}}) > L.$$

Величину $-(a^-_{m_1} + \dots + a^-_{m_{q_1}})$ примем за второй член конструируемого вспомогательного ряда. На следующем шаге будем последовательно прибавлять следующие за $a^+_{n_{p_1}}$ члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a^+_{n_k}$ до тех пор, пока не получим, что

$$(a^+_{n_1} + \dots + a^+_{n_{p_1}}) - (a^-_{m_1} + \dots + a^-_{m_{q_1}}) + (a^+_{n_{p_1+1}} + \dots + a^+_{n_{p_2}}) > L,$$

но

$$(a^+_{n_1} + \dots + a^+_{n_{p_1}}) - (a^-_{m_1} + \dots + a^-_{m_{q_1}}) + (a^+_{n_{p_1+1}} + \dots + a^+_{n_{p_2-1}}) \le L.$$

Сумма добавленных на этом шаге элементов $(a^+_{n_{p_1+1}} + \dots + a^+_{n_{p_2}})$ даёт третий член вспомогательного ряда. Далее будем вычитать последовательно члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a^-_{n_k}$, начиная с $a^-_{n_{q_1+1}}$, пока не получим неравенства

$$(a^+_{n_1} + \dots + a^+_{n_{p_1}}) - (a^-_{m_1} + \dots + a^-_{m_{q_1}}) + (a^+_{n_{p_1+1}} + \dots + a^+_{n_{p_2}}) -$$

$$-(a^-_{m_{q_1+1}} + \dots + a^-_{m_{q_2}}) \le L,$$

$$(a^+_{n_1} + \dots + a^+_{n_{p_1}}) - (a^-_{m_1} + \dots + a^-_{m_{q_1}}) + (a^+_{n_{p_1+1}} + \dots + a^+_{n_{p_2}}) -$$

$$-(a^-_{m_{q_1+1}} + \dots + a^-_{m_{q_2-1}}) > L,$$

и так далее.

В результате получим ряд

$$(a_{n_1}^+ + \cdots + a_{n_{p_1}}^+) - (a_{m_1}^- + \cdots + a_{m_{q_1}}^-) + \tag{26}$$

$$+(a_{n_{p_1+1}}^+ + \cdots + a_{n_{p_2}}^+) - \cdots$$

Пусть частичные суммы его равны σ_k. Тогда

$$\sigma_1 = a_{n_1}^+ + \cdots + a_{n_{p_1}}^+,\ |\sigma_1 - L| < a_{n_{p_1}}^+,$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 - (a_{m_1}^- + \cdots + a_{m_{q_1}}^-),\ |\sigma_2 - L| < a_{m_{q_1}}^-,$$

$$\sigma_3 = \sigma_2 + (a_{n_{p_1+1}}^+ + \cdots + a_{n_{p_2}}^+),\ |\sigma_3 - L| < a_{n_{p_2}}^+,$$

$$\sigma_4 = \sigma_3 - (a_{m_{q_1+1}}^- + \cdots + a_{m_{q_2}}^-),\ |\sigma_4 - L| < a_{m_{q_2}}^-,$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

то есть $|\sigma_{2k-1} - L| < a_{n_{p_k}}^+$, $|\sigma_{2k} - L| < a_{m_{q_k}}^-, k \in \mathbb{N}$.

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Поэтому $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, и $a_{n_{p_k}}^+ \to 0$ и $a_{m_{q_k}}^- \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\sigma_{2k-1} \to L, \sigma_{2k} \to L$, а значит $\sigma_n \to L$ при $n \to \infty$, то есть ряд (26) сходится и его сумма равна L. Отсюда, согласно теореме 7.2, ряд

$$a_{n_1}^+ + \cdots + a_{n_{p_1}}^+ - a_{m_1}^- - \cdots - a_{m_{q_1}}^- + a_{n_{p_1+1}}^+ + \cdots + a_{n_{p_2}}^+ - \cdots \tag{27}$$

сходится и его сумма равна L.

Следует отметить, что если $L \in (-\infty, 0)$, то в качестве слагаемых первого члена вспомогательного ряда (26) следует брать первые члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{m_k}^-$, все последующие рассуждения аналогичны тем, которые проводятся в пункте 2). Наконец, при $L = 0$ в качестве первого члена вспомогательного ряда можно взять $a_{n_1}^+$ (при этом $p_1 = 1$) или $a_{m_1}^-$ (тогда $q_1 = 1$).

$\lhd$

8 Умножение рядов

Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{28}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{29}$$

Подражая правилу умножения конечных сумм, рассмотрим всевозможные произведения членов рядов (28) и (29) : $a_i b_k, i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, из них можно составить бесконечную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdots & a_3b_n & \cdots \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

Перенумеруем все члены этой матрицы в произвольном порядке, получим последовательность $\{U_k\} : U_k = a_{i_k} b_{j_k}$. Соответствующий ряд

$$a_{i_1} b_{n_1} + a_{i_2} b_{n_2} + \cdots + a_{i_k} b_{j_k} + \cdots \tag{30}$$

называют произведением рядов (28) и (29). Чаще всего нумеруют элементы матрицы по диагоналям

$$a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + \cdots$$

или по квадратам

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + \cdots$$

Если произведение рядов выписано по диагоналям и члены, лежащие на одной диагонали, при этом объединены, то ряд

$$a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \cdots \tag{31}$$

называют произведением рядов (28) и (29) в форме Коши. Заметим, что n-ый член ряда (31) имеет вид :

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 8.1 (Коши) *Если ряды (28) и (29) абсолютно сходятся, то любой ряд, являющийся произведением этих рядов, абсолютно сходится и его сумма равна произведению сумм рядов (28) и (29).*

$\triangleright$ По условию ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{32}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \tag{33}$$

сходятся. Пусть A_n, A_n^*, B_n, B_n^* — n-ые частичные суммы рядов (28), (32), (29), (33) соответственно, σ_n — n-ая частичная сумма ряда (30) и σ_n^* — n-ая частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{i_k}||b_{j_k}|$. Пусть $p_k = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $q_k = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sigma_n^* \leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{p_n}|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{q_n}|) = A_{p_n}^* \cdot B_{q_n}^*,$$

Так как ряды (32) и (33) сходятся, то последовательности $\{A_n^*\}$ и $\{B_n^*\}$ ограничены, т.е. $\exists M_1 > 0$, $\exists M_2 > 0$:

$$|A_n^*| \leq M_1, \quad |B_n^*| \leq M_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$\sigma_n^* \leq A_{p_n}^* \cdot B_{q_n}^* \leq M_1 \cdot M_2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

что влечёт сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{i_k}||b_{j_k}|$, т.е. абсолютную сходимость ряда (30). Заметим, что ряды – произведения отличаются друг от друга порядком следования членов, а поэтому получены друг из друга перестановкой членов. Согласно теореме 7.5 они имеют одну и ту же сумму. Для подсчёта суммы ряда (30) рассмотрим произведение, выписанное по квадратам. Поскольку для сходящихся рядов имеет место сочетательное свойство, то можно рассмотреть ряд

$$a_1b_1 + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3) + \cdots \tag{34}$$

Если S_n— n-ая частичная сумма этого ряда, то

$$S_1 = a_1b_1 = A_1B_1,$$

$$S_2 = a_1b_1 + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = A_2B_2,$$

$$S_3 = a_1(b_1 + b_2 + b_3) + a_2(b_1 + b_2 + b_3) + a_3(b_1 + b_2 + b_3) = A_3B_3,$$

и $S_n = A_n B_n$. Если A, B — суммы рядов (28) и (29) соответственно, то

$$\lim S_n = A\cdot B.$$

Следовательно, сумма ряда (34), а значит и любого ряда (30) равна произведению $A\cdot B$. $\triangleleft$

Теорема 8.2 (Мертенса) *Если ряды (28) и (29) сходятся, причём один из них абсолютно, то их произведение в форме Коши сходится и его сумма равна произведению сумм данных рядов.*

Мы опускаем доказательство теоремы Мертенса, отсылая читателей к [5], стр. 328.

Замечание 8.1 *Требование абсолютной сходимости одного из рядов (28), (29) в теореме 8.2 существенно.*

Для подтверждения последнего утверждения рассмотрим

Пример 8.1 *Пусть в рядах (28) и (29)* $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда ряд (34) – произведение в форме Коши имеет вид* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, *где*

$$c_k = (-1)^k \left(\frac{1}{1^{1/2}(k-1)^{1/2}} + \frac{1}{2^{1/2}(k-2)^{1/2}} + \dots + \frac{1}{(k-1)^{1/2}1^{1/2}} \right).$$

Т. к.

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^{1/2}(k-i)^{1/2}} \geq (k-1)\frac{1}{(k-1)^{1/2}(k-1)^{1/2}} = 1,$$

то, в силу необходимого условия сходимости числового ряда, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится. $\triangleleft$

9 Бесконечные числовые произведения

Определение 9.1 *Пусть дана числовая последовательность* $\{a_n\}$, *члены которой отличны от нуля. Символ*

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot \ldots \cdot a_n\cdot \ldots \quad \textit{или} \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n \tag{35}$$

называют бесконечным числовым произведением, а число, равное произведению первых n сомножителей $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, — n-ым частичным произведением бесконечного произведения (35). Если числовая последовательность $\{P_n\}$ сходится к отличному от нуля числу P, то бесконечное произведение (35) называют сходящимся, в противном случае — расходящимся. Если бесконечное произведение сходится и $P = \lim P_n$, то число P называют значением этого произведения и пишут :

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ясно, что каждому бесконечному произведению соответствует последовательность его частичных произведений. Верно и обратное: каждой числовой последовательности $\{P_n\}$, все члены которой отличны от нуля, соответствует бесконечное произведение, для которого эта последовательность является последовательностью частичных произведений (члены этого произведения $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1$, и $P_1 = a_1$).

Теорема 9.1 (необходимое условие сходимости) *Если бесконечное числовое произведение (35) сходится, то* $\lim a_n = 1$.

$\triangleright$ Пусть бесконечное произведение (35) сходится и P–его значение. Тогда $P \neq 0, \lim P_{n-1} = \lim P_n = P$. Поскольку $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}, \forall n > 1$, то $\lim a_n = 1$. $\triangleleft$

Замечание 9.1 *Условие* $\lim a_n = 1$ *является необходимым, но не достаточным условием для сходимости бесконечного произведения (35).*

$\triangleright$ Действительно, для бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n}$ имеем:

$$\lim a_n = \lim \frac{n+1}{n} = 1, \quad \text{но } P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1 \to +\infty.$$

Поэтому рассматриваемое бесконечное произведение расходится. $\triangleleft$

Поскольку бесконечное произведение, у которого хоть один сомножитель равен нулю, считается расходящимся, то в дальнейшем мы не будем рассматривать такие бесконечные произведения. Далее, из определения сходимости бесконечного произведения ясно, что присоединение или отбрасывание конечного числа первых отличных от нуля сомножителей не влияет на его сходимость или расходимость. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только те бесконечные произведения, у которых сомножители положительны.

Теорема 9.2 *Бесконечное произведение (35) с положительными сомножителями сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n. \tag{36}$$

В случае сходимости сумма S ряда (36) и значение P произведения (35) таковы, что

$$P = e^s.$$

$\triangleright$ Пусть $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k, \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$S_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В силу непрерывности показательной функции на $\mathbb{R}$ и логарифмической функции на промежутке $(0; +\infty)$, последовательность $\{P_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{S_n\}$. При этом если $S = \lim S_n$, то $\lim P_n = e^s \in (0; +\infty)$. Если же $P = \lim P_n \neq 0$, то существует $\lim S_n = \ln P$ и $P = e^s$. $\triangleleft$

Часто бывает удобно общий член бесконечного произведения (35) представить в виде $a_n = (1 + u_n), n \in \mathbb{N}$.

Теорема 9.3 *Если* $u_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$, *то для сходимости бесконечного произведения*

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k) \tag{37}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{38}$$

$\triangleright$ Необходимым условием сходимости бесконечного произведения (37) и ряда (38) является условие $\lim u_k = 0$, поэтому в дальнейшем будем считать, что $u_k \to 0$.

По теореме 9.2 бесконечное произведение (37) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + u_k). \tag{39}$$

По условию $u_k \geq 0, \forall k \geq 1$, поэтому

$$\ln(1+u_k) \geq 0.$$

Учитывая следствие 3.3.2 теоремы 3.3 и тот факт, что

$$\lim \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = 1,$$

получаем, что ряд (39) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (38). $\lhd$

Теорема 9.4 *Если ряды (38) и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^2$ *сходятся, то сходится бесконечное произведение (37).*

$\rhd$ Поскольку ряд (38) сходится, то $\lim u_k = 0$, поэтому $1 + u_k > 0$, $\forall k > k_0$. Так как

$$\ln(1+u_k) = u_k - \frac{u_k^2}{2} + o(u_k^2), \quad k \to \infty$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{u_k^2}{2} + o(u_k^2) \right)$$

сходится, то согласно теореме 2.2 сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k)$. Поэтому сходится бесконечное произведение (37). $\lhd$

Пример 9.1 *Исследовать на сходимость бесконечное произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin n}{n} \right).$$

$\rhd$ Для рассматриваемого бесконечного произведения $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{u_n\}$ не является знакопостоянной, поэтому изучим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}.$$

Первый ряд сходится в силу признака Дирихле, а второй — в силу признака сравнения (теорема 3.2). По теореме 9.4 данное бесконечное произведение сходится. $\lhd$

В заключение введём

Определение 9.2 *Бесконечное произведение (35), $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится ряд (36). Если же ряд (36) условно сходится, то бесконечное произведение (35) называется условно сходящимся.*

Теорема 9.5 (критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения) *Пусть $u_n \in (-1; +\infty), \forall n \in \mathbb{N}$. Для того чтобы бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ сходилось абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходился ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.*

$\triangleright$ Необходимость. Если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ сходится абсолютно, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\ln(1+u_n)|$ и $\lim u_n = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\ln(1+u_n)|}{|u_n|} = 1$ и в силу теоремы сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится.

Достаточность. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\ln(1+u_n)|$, что означает абсолютную сходимость бесконечного произведения. $\triangleleft$

Пример 9.2 *Исследуем на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \big(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\big)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

$\triangleright$ Из необходимого условия сходимости бесконечного произведения следует, что при $\alpha \le 0$ бесконечное произведение расходится. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ абсолютно сходится при $\alpha > 1$ и условно сходится при $\alpha \in (0, 1]$, то данное бесконечное произведение абсолютно сходится при $\alpha > 1$. Далее, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$ сходятся при $1 \ge \alpha > \frac{1}{2}$. Поэтому данное бесконечное произведение сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$, причём условно. Так как

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right),\ n \to \infty,$$

то при $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\big(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\big)$ и данное бесконечное произведение расходится. $\triangleleft$

Список литературы

[1] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. *Математический анализ.* – М.: Наука, 1979.

[2] Кудрявцев Л.Д. *Математический анализ, т. 2.* – М.: Высшая школа, 1973.

[3] Тер–Крикоров А.М., Шабунин М.И. *Курс математического анализа.* – М.: Изд-во МФТИ, 2000.

[4] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. *Лекции по математическому анализу.* – М.: Высшая школа, 2000.

[5] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II.* – М.: Наука, 1966.

[6] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе.* – М.: Мир, 1967.

Содержание