Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики
(Технический университет)

Кафедра высшей математики

И.Ю.Попов

Лекции по математической физике

Учебное пособие

Санкт-Петербург
1998

УДК 517.9
Попов И.Ю. Лекции по математической физике.- СПб, СПбГИТМО(ТУ), 1998, с.
В пособии представлены основные элементы теории интегральных уравнений и уравнений в частных производных математической физики. Изложение носит характер конспекта лекций.

Пособие предназначено для студентов отделения прикладной математики и информатики.
Одобрено на заседании кафедры высшей математики 7 мая 1998 г., протокол №6.

Оглавление

Глава 1.

Элементы теории операторов.

В этой главе мы вспомним те элементы теории операторов, которые будут необходимы в дальнейшем.

1.1. Основные определения.

1.1.1. Операторы.

Определение 1. Оператором называется отображение $A : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$, где $\mathcal{H},\ \mathcal{G}$ - гильбертовы пространства.

Область определения оператора $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ - множество, на котором задано действие оператора;
область значений оператора $\mathcal{R}(A) = A\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{G}$.
Обычно мы будем иметь дело со случаем $\mathcal{H} = \mathcal{G}$.

Определение 2. Операторы A_1 и A_2 называются равными, если:

1) $\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A_2)$;

2) $A_1 f = A_2 f$ для $\forall f \in \mathcal{D}(A_1)$.

Определение 3. Оператор $\tilde{A}$ называется расширением A, а A - сужением $\tilde{A}$ (обозначается $\tilde{A} \supset A$), если:

1) $\mathcal{D}(\tilde{A}) \supset \mathcal{D}(A)$;

2) $\tilde{A} f = Af\ \forall f \in \mathcal{D}(A)$.

Определение 4. Оператор A называется непрерывным в точке $f \in \mathcal{D}(A)$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall g \in \mathcal{D}(A),\ \|f - g\| < \delta \Rightarrow \|Af - Ag\| < \varepsilon$

Определение 5. Оператор называется непрерывным в области $\mathcal{G}$, если он непрерывен для $\forall f \in G$.

Определение 6. Оператор A называется линейным, если $\forall f, g \in \mathcal{D}(A), \forall \alpha, \beta \in C\ A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$.

Рассмотрим примеры линейных операторов.

Пример 1. Дифференциальный оператор D
$\mathcal{H} = C[0,1],\ Df = f',\ \mathcal{D}(D) = C^\infty$. Также можно рассмотреть $\tilde{D} \supset D$, заданный на $\mathcal{D}(\tilde{D}) = C^1$.

Пример 2. Интегральный оператор L

$\mathcal{H} = \mathcal{D}(L) = C[0,1]$, $(Lf)(x) = \int\limits_0^1 l(x,y)f(y)dy$. Функция $l(x,y)$ называется ядром интегрального оператора.

1.1.2. Обратные операторы

Определение 7. Обратным к оператору A оператором называется оператор A^{-1}, определяемый следующими условиями:

1) $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$;

2) $A^{-1}Af = f\ \forall f \in \mathcal{D}(A)$; $AA^{-1}f = f\ \forall f \in \mathcal{R}(A)$.

Вопрос существования обратного оператора - это вопрос об условиях разрешимости операторного уравнения

$$Af = h \tag{1.1}$$

В конечномерном случае эти условия формулировала *альтернатива Фредгольма.*

Теорема 1.1.1 (Альтернатива Фредгольма).

1) *если уравнение $Af = \mathbf{0}$ имеет только тривиальное решение, то уравнение (1.1) разрешимо единственным образом при любой правой части;*

2) *если уравнение $Af = \mathbf{0}$ имеет нетривиальные решения, то (1.1) разрешимо (заведомо не единственным образом) тогда и только тогда, когда h ортогональна всем решениям сопряженной однородной задачи.*

В бесконечномерном случае ситуация значительно сложнее.

Пример 3. Рассмотрим оператор

$$A : C[0,1] \to C[0,1],\ Af(x) = \int\limits_0^x f(y)dy.$$

Докажем, что, хотя уравнение $Af = \mathbf{0}$ имеет только тривиальное решение, (1.1) для такого оператора разрешимо не всегда.

1) $\int\limits_0^x f(y)dy \equiv 0 \Rightarrow f(x) = 0$ для любого x.

2) Пусть $\exists x_0 :\ f(x_0) = y$. Тогда по непрерывности $f(x)$ выберем $\delta :\ x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $|y-\alpha| \geq q > 0 \Rightarrow f(x) \in (y-\alpha, y+\alpha)$. Выбрав $0 < \Delta < \delta$, получим: $0 = \int\limits_0^{x_0+\Delta} f(x)dx = \int\limits_0^{x_0} f(x)dx + \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta} f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta} f(x)dx \geq \Delta|y-\alpha| > 0$, и мы пришли к противоречию. Таким образом, $Af = \mathbf{0}$ разрешимо только при $f \equiv 0$.

3) Если h недифференцируема, то уравнение $Af = h$ неразрешимо на множестве непрерывных функций.

1.1.3. Ограниченные операторы

Определение 8. Линейный оператор A называется ограниченным, если $\exists C > 0 : \ \forall f \in \mathcal{D}(A) \ \|Af\| \leq C\|f\|$.

$\inf(C) = \|A\|$ называется нормой оператора.

Очевидно следующее соотношение:

$$\|A\| = \sup_{f \in \mathcal{D}(A)} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \sup_{f \in \mathcal{D}(A), \|f\|=1} \|Af\|.$$

Приведем несколько свойств ограниченных операторов.

Лемма 1.1.1. *Если линейный оператор непрерывен в некоторой точке $f \in \mathcal{D}(A)$, то он непрерывен на $\mathcal{D}(A)$.*

Лемма 1.1.2. *Для линейных операторов непрерывность равносильна ограниченности.*

Доказательство.

1) $\forall f \ \|Af\| \leq C\|f\|$; $\|Af - Ay\| = \|A(f-y)\| \leq C\|t-y\| < \varepsilon$, если $\|f-y\| < \delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

2) Пусть A неограничен; тогда $\exists f : \ \|f\| = 1, \ \forall \varepsilon \|Af\| \geq \varepsilon$.

$\|A(g+\Delta) - A(g)\| = \|A\Delta\|, \ \Delta = \frac{f}{\alpha}$, тогда $\|A\Delta\| \geq \frac{\varepsilon}{\alpha}$. $\forall \alpha \ \exists \varepsilon : \ \frac{\varepsilon}{\alpha} \geq 1$. Тогда, увеличивая α, получим: $\|\Delta\| \to 0, \ \|A\Delta\| > 1\|$. Т.е. нарушается непрерывность, и мы приходим к противоречию.

Лемма доказана.

Пример 4. Всякий линейный оператор в конечномерном пространстве ограничен.

Приведем пример неограниченного оператора.

Пример 5. $Df = f'$. Пусть $D : C[a,b] \to C[a,b]$; $\mathcal{D}(D) = C^\infty(a,b)$.

Очевидно, что $Df_1 - Df_2 = D(f_1 - f_2)$. Предположим, что оператор D ограничен, и примем $\|f_1\| = 1, \ f_2 \equiv 0$. Тогда (из ограниченности) $\frac{\|Df\|}{\|f\|} \leq \|D\|$, но, взяв $f = e^{-nx}$, соответствующим выбором n можно добиться нарушения этого неравенства.

Исследование неограниченного оператора сопряжено со значительными затруднениями, поэтому можно попытаться видоизменить исходно неограниченный оператор с тем, чтобы придать ему необходимые свойства.

Одним из способов может быть изменение пространства, на котором определено действие оператора, например

$$D : C^1[a,b] \to C[a,b],$$

причем в C^1 введена норма $\|f\| = \max_t |f(t)| + \max_t |f'(t)|$. Такой оператор становится ограниченным, но происходит сужение исходного пространства, что оказывается неприемлемым во многих задачах, особенно, физических. Поэтому рассмотрим другой способ.

Произведем расширение класса ограниченных операторов, введя следующее определение.

Определение 9. Оператор T с областью определения $\mathcal{D}(T)$ называется замкнутым, если

$$\{\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T) : \exists \lim_{n\to\infty} f_n = f, \exists \lim_{n\to\infty} Tf_n = g\} \Rightarrow \{f \in \mathcal{D}(T), g = Tf\}$$

Замечание 1. Этим определением запрещено выполнение:

$$\lim_n f_n = f,\ \lim_n h_n = f\ , но \lim_n Tf_n \neq \lim_n Th_n.$$

Определение 10. Оператор допускает замыкание, если он не замкнут, но

$$\lim_n f_n = f,\ \lim_n h_n = f\ \Rightarrow \lim_n Tf_n = \lim_n Th_n$$

(то есть, если только $\lim\limits_n f_n = f \notin \mathcal{D}(T)$).

Оператор T, допускающий замыкание, можно расширить до замкнутого $\tilde{T}$, дополнив область определения $\mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathcal{D}(T) + \{$все пределы последовательностей $\{f_n\} : f_n \in \mathcal{D}(T)\}$ и положив

$$\tilde{T}(f \in \mathcal{D}(\tilde{T}) \setminus \mathcal{D}(\tilde{T})) = \lim_n Tf_n, если\ f = \lim_n f_n.$$

Пример 6. Оператор, не допускающий замыкания.

$$C[0,1];\ \|f\|_C^2 = \int\limits_0^1 f^2(t)dt\ (Af)(t) = tf(1).$$

$\|Af\| = \int\limits_0^1 t^2 f^2(1)dt = \frac{1}{3}f^2(1)\ \forall f \in C.\ \|Af_1 - Af_2\| = \frac{1}{3}(f_1^2(1) - f_2^2(1)).$

Пусть $\|f_1 - f_2\| = \|\lim\limits_n f_n^{(1)} - \lim\limits_n f_n^{(2)}\| = 0$. Это может выполняться при

$f_n^{(1)} \equiv 0\ \forall n \Rightarrow f_1 \equiv 0.$

$f_n^{(2)} = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1-\frac{1}{n}] \\ n(t-1+\frac{1}{n}) & t \in [1-\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \Rightarrow f_2 = \begin{cases} 0 & t \in [0,1) \\ 1 & t = 1 \end{cases},$

но тогда $\|Af_1 - Af_2\| = \frac{1}{3} \neq 0$.

1.1.4. Симметрические и самосопряженные операторы.

Определение 11. $T, \mathcal{D}(T)$ всюду плотно в $\mathcal{H}$. $g \in \mathcal{D}(T^*), если\ \exists g^* :\ \forall f \in \mathcal{D}(T) (Tf, g) = (f, g^*)$. Тогда принимаем $g^* = T^* g$; определенный таким образом оператор T^* называется сопряженным к T.

Определение 12. Оператор A называется симметрическим (симметричным), если для

$$\forall f, g \in \mathcal{D}(A) : (Af, g) = (f, Ag);$$

при этом $\mathcal{D}(A)$ всюду плотно в $\mathcal{H}$.

Определение 13. Оператор A называется самосопряженным, если $A^* = A$.

Замечание 1. Оператор может быть симметрическим, но не самосопряженным. Для самосопряженного $\begin{cases} \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \\ Af = A^* f \end{cases}$, а для симметрического возможна ситуация $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$.

Пример 7. Рассмотрим сопряженный оператор к оператору дифференцирования, не анализируя условий гладкости, а рассматривая лишь краевые условия.

1)

$$\mathcal{H} = \Lambda_2[a,b];\ Af = f';\ (f,g) = \int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

а) $(Af,g) = \int\limits_a^b f'(t)\overline{g(t)}dt = f\overline{g}|_a^b - \int\limits_a^b f(t)\overline{g'(t)}dt = -\int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}dt = (f, A^*g)$ (засчет области определения: $\mathcal{D}(A) = \{f : f(a) = f(b) = 0\}$). Т.е. $A^*g = -g' \neq Ag$.

б) введем оператор $Df = if'$.

$(Df,g) = i\int\limits_a^b f'(t)\overline{g(t)}dt = if\overline{g}|_a^b - i\int\limits_a^b f(t)\overline{g'(t)}dt = \int\limits_a^b f(t)\overline{ig'(t)}dt = (f, D^*g)$. Для симметричности необходимо

$$\mathcal{D}(D) = \{f : f(a) = f(b) = 0\}.$$

в) Попробуем расширить до самосопряженного (т.е. дополнить $\mathcal{D}(D)$). Необходимо: $f(a)\overline{g(a)} - f(b)\overline{g(b)} = 0$.

$\frac{f(a)}{f(b)} = \overline{\frac{g(b)}{g(a)}}$. Положим $f \equiv g,\ f(a) \neq 0$. Тогда $f(a) = \overline{\frac{f(b)}{f(a)}} f(b) = \theta f(b)$. Из условия $f(a)\overline{f(a)} = f(b)\overline{f(b)}$ получаем $|f(a)| = |f(b)| \Rightarrow |\theta| = 1$, т.е. необходимое условие самосопряженности. Можно доказать, что оно будет и достаточным. Таким образом,

$$\mathcal{D}(\tilde{D}) = \{f : f(a) = \theta f(b),\ |\theta| = 1\}.$$

Вывод: оператор дифференцирования (комплексного) на отрезке симметричный, несамосопряженный, имеющий самосопряженное расширение.

2)

$$\mathcal{H} = \Lambda_2[0,\infty);\ Df = if'.$$

$(Df,g) = i\int\limits_0^\infty f'(t)\overline{g(t)}dt = if\overline{g}|_0^\infty - i\int\limits_0^\infty f(t)\overline{g'(t)}dt = \int\limits_0^\infty f(t)\overline{ig'(t)}dt = (f, D^*g)$.

Для симметричности необходимо $\mathcal{D}(D) = \{f : f(0) = 0\}$.

Расширения не допускает, так как: $f(0)\overline{g(0)} = 0;\ f \equiv g \Rightarrow |f(0)|^2 = 0$.

3)

$$\mathcal{H} = \Lambda_2(-\infty,\infty);\ Df = if'.$$

Замыкание оператора является самасопряженным без дополнительных условий.

Определение 14. Оператор, замыкание которого самосопряженное, называется в существенном самосопряженным (существенно самосопряженным).

Теорема 1.1.2 (об ограниченных операторах в банаховом пространстве).
A - ограниченный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{B}$. $\mathcal{D}(A)$ всюду плотно в $\mathcal{B}$. Тогда $\exists! \tilde{A}$ - расширение $A : \mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{B}$, $\tilde{A}$ непрерывен, $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Доказательство.

$\forall f \in \mathcal{B},\ f \notin \mathcal{D}(A)\ \exists$ фундаментальная $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A) :\ f_n \to f$. Тогда положим $\tilde{A}f = \lim\limits_n Af_n$.

Рассмотрим фундаментальную $g_n :\ g_n \to f$. Тогда $\|A(f_n - g_n)\| \leq \|A\|\|f_n - g_n\| \to 0$, т.е. $A(f_n - g_n) \to 0$ и $\lim\limits_n Ag_n = \tilde{A}f$.

Докажем непрерывность.

$$\forall f \|Af\| \leq C\|f\|.\ \|\tilde{A}f\| = \lim_n \|Af_n\| \leq \lim_n \|A\|\|f_n\| \leq C \lim_n \|f_n\| = C\|f\|,$$

т.е.

$$\|\tilde{A}f\| \leq C\|f\|,\ и\ \|\tilde{A}\| \leq \|A\|.$$

С другой стороны

$$\|A\| = \max_{\|f\|=1, f\in\mathcal{D}(A)} |Af|, \ \|\tilde{A}\| = \max_{\|f\|=1, f\in\mathcal{B}} |\tilde{A}f|, \ \text{т.е.}\ \|\tilde{A}\| \geq \|A\|,$$

т.к. максимум берется по более широкому множеству. Таким образом, $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Докажем единственность. Пусть $\exists f : \tilde{A}_1 f \neq \tilde{A}_2 f$. Очевидно, что $f \notin \mathcal{D}(A)$. Т.к. $\forall f\ \exists\{f_n\} : f_n \to f$, и по условию $\forall n\ \ \tilde{A}_1 f_n = \tilde{A}_2 f_n$, то $\lim\limits_n \tilde{A}_1 f_n = \lim\limits_n \tilde{A}_2 f_n$ (по непрерывности каждого из них), т.е. $\tilde{A}_1 f = \tilde{A}_2 f$. Теорема доказана.

Теорема 1.1.3. *Если оператор определен на всем пространстве, то он ограничен.*

Теорема 1.1.4. *Пусть A ограниченный, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Тогда A^* ограничен, и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Доказательство.

$$\|A^* f\|^2 = (A^* f, A^* f) = (AA^* f, f) \leq \|A\|\|A^* f\|\|f\|,$$

т.е. $\|A^* f\| \leq \|A\|\|f\|$, оператор A^* ограничен и $\exists\|A^*\| \leq \|A\|$. Аналогично получаем $\|Af\| \leq \|A^*\|\|f\|$, т.е. $\|A^*\| = \|A\|$. Теорема доказана.

Теорема 1.1.5 (об обратимости оператора, близкого к тождественному).
Пусть M - оператор в банаховом пространстве, $\|M\| < 1$. Тогда уравнение $f - Mf = h$ разрешимо при $\forall h$, т.е. существует ограниченный обратный оператор $(I - M)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} M^n$; при этом $\|(I - M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|M\|}$.

Доказательство.

Положим $J = \sum\limits_{n=0}^{\infty} M^n$, $J_N = \sum\limits_{n=0}^{N} M^n$. Тогда

$$J_N(I - M) = \sum_{n=0}^{N} (M^n - M^{n+1}) = I - M^{N+1}.$$

$0 \leq \|M^{N+1}\| \leq \|M\|^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$, т.е. $J_N \xrightarrow{N\to\infty} I$, и мы получаем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M^n = (I - M)^{-1}$.

Проверим, что этот ряд действительно сходится к оператору.

$\|\sum\limits_{n=0}^{\infty} M^n\| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|M^n\| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|M\|^n$ - сходится абсолютно, т.е. существует предельный оператор (т.к. пространство ограниченных операторов в банаховом пространстве полное).

Сделаем оценку нормы.

$$\|I - M\|^{-1} = \|\sum_{n=0}^{\infty} M^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M\|^n = \|(I - M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.1.6 (об обратимости оператора, близкого к обратимому).
Пусть L_0 - ограниченный оператор в банаховом пространстве, L_0^{-1} - обратный к нему. Тогда для $L :\ \|L - L_0\| < \frac{1}{L_0^{-1}}$ существует ограниченный обратный оператор L^{-1}.

Доказательство.

$$L = L_0 - (L_0 - L) = L_0(I - L_0^{-1}(L_0 - L)).$$

По предыдущей теореме существует оператор $(I - L_0^{-1}(L_0 - L))^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(L_0^{-1}(L_0 - L))^n$. Тогда

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(L_0^{-1}(L_0 - L))^n L_0^{-1},\ \|L^{-1}\| \le \frac{\|L_0^{-1}\|}{1 - \|L_0^{-1}(L_0 - L)\|}.$$

Теорема доказана.

1.2. Спектр и резольвента оператора.

Определение 15. $R(\lambda) = R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ - резольвента оператора A.

Определение 16. В бесконечномерном случае могут возникнуть следующие ситуации:

1) λ является собственным значением A, т.е. $\exists x \neq 0 :\ \ Ax = \lambda x$; тогда $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ не существует, и λ называется **точкой точечного спектра**;

2) $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ существует, но не является ограниченной; тогда λ - **точка непрерывного спектра**;

3) существует ограниченная $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$.

Определение 17. Спектром оператора называется совокупность собственных значений (точечного спектра) и непрерывного спектра.

Определение 18. Точки, не принадлежащие спектру (т.е., если $\exists(A - \lambda I)^{-1}$ - ограниченный и определенный на всем пространстве) называются регулярными.

Теорема 1.2.1. *A ограничен. Тогда $\lambda : \ \|\lambda\| > \|A\|$ является регулярной точкой.*

Доказательство.
$\|A - \lambda I\| \le \|A\| + |\lambda|\|I\| = \|A\| + |\lambda|$. Пусть $M \stackrel{def}{=} \frac{A}{|\lambda|}$. Тогда $\|M\| < 1$.
$\mathcal{B}$ - банахово, $\exists(I - \frac{A}{|\lambda|})^{-1}$, причем он ограничен:

$$\|(I - M)^{-1}\| = \|I - \frac{A}{|\lambda|})^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} \Leftrightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

То есть, резольвента существует и ограничена. Теорема доказана.

Теорема 1.2.2. *λ не принадлежит точечному спектру $\Leftrightarrow$ $A - \lambda I$ осуществляет биекцию $\mathcal{D}(A)$ на $\mathcal{R}(A)$.*

Доказательство.
$\boxed{\Rightarrow}$ Если построена биекция, то не существует $f \in \mathcal{D}(A) :\ Af \equiv 0$, за исключением тривиальной.
$\boxed{\Leftarrow}$ Если λ - точка точечного спектра, то $\exists f \not\equiv 0 :\ (A - \lambda I)f \equiv 0$, что противоречит биективности $A - \lambda I$. Теорема доказана.

Теорема 1.2.3 (Тождество Гильберта).
$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu$.

Доказательство.
$R_\lambda - R_\mu = \lambda R_\lambda R_\mu - \mu R_\lambda R_\mu$
$R_\lambda(I - \lambda R_\mu) = R_\mu(I - \mu R_\lambda)|(A - \lambda I)(A - \mu I)$
$(I - \lambda R_\mu)(A - \mu I) = (I - \mu R_\lambda)(A - \lambda I)$
$A - \mu I - \lambda I = A - \lambda I - \mu I$ - верно. Теорема доказана.

Следствие 1.2.3.1.

1) $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.

2) $\lim\limits_{\Delta\lambda \to 0} \frac{R_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda}{\Delta\lambda} = \lim\limits_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda} R_\lambda}{\Delta\lambda} = \lim\limits_{\Delta\lambda \to 0} R_{\lambda+\Delta\lambda} R_\lambda = R_\lambda^2$ (т.к. R_λ непрерывна по λ в точке λ), т.е. она бесконечно дифференцируема (аналитическая функция).

Итак, R_λ - аналитическая оператор-функция на множестве регулярных точек (резольвентном множестве).

$(A - \lambda I)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ - разложение в ряд Лорана (имеет место при $|\lambda| > \|A\|$, но, возможно, и в большей области).

Определение 19. $r_\sigma(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ - спектральный радиус (если такой предел существует).

Спектр оператора находится в круге $|\lambda \leq r_\sigma(A)$. Отметим, что $r_\sigma(A)$ может быть существенно меньше $\|A\|$ (в частности, это наблюдается в следующем примере).

Пример 8. $C[0,1]$; $(Af)(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$.

1) $\|f\| = \max\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Возьмем $f: \|f\| = 1 \Rightarrow f(t) \leq 1 \; \forall t \in [0,1]$. Тогда для таких f

$$\|Af\| = \max_{x \in [0,1]} |\int\limits_0^x f(t)dt| \leq \max_{x \in [0,1]} |\int\limits_0^x 1dt| = 1.$$

Таким образом $\|A\| \leq 1$. Эта оценка достижима при $f \equiv 1$, т.е. $\|A\| = 1$.

2) $(A^n f)(x) = \int\limits_0^x \cdots \int\limits_0^s f(t)dt \cdots dy$.

По индукции можно доказать $(A^n f)(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$. Тогда для промежутка $[0,1]$

$$\|A^n\| \leq \int\limits_0^x \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = -\frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{(1-t)^n}{n} \right|_0^1 = \frac{1}{n!}.$$

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq (\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)^{-\frac{1}{n}} \leq \frac{e}{n} \to 0$$

Таким образом, $r_\sigma(A) = 0$, т.е. спектр состоит из одной точки 0. При этом она не является собственным значением (см. пример 3), следовательно, это точка непрерывного спектра.

Рассмотрим более подробно случай самосопряженного оператора A.

Теорема 1.2.4. *λ — собственное число самосопряженного оператора A тогда и только тогда, когда $\overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)} \neq \mathcal{H}$, где $\mathcal{R}$ — область значений.*

Доказательство.
$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists x : \forall z \in |d(A) : \overline{|d(A)} = \mathcal{H} \quad ((A-\lambda I)z, x) = 0$, т.е. $\exists x \perp \overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)}$

$$(Ax, z) - (\lambda z, x) = 0 \qquad (a, A^* z) - (z, \bar{\lambda} x) = 0 \qquad (z, (A - \bar{\lambda} I)x) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall z \in H$ это верно, т.е. $Ax = \bar{\lambda} x$, т.е. $\bar{\lambda}$ — собственное число. Поскольку А — самосопряженный оператор, то $\bar{\lambda} \in R$, т.е. $\lambda = \bar{\lambda}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\exists z : \forall x (x, (A-\lambda I)z) = 0 \Rightarrow \forall x \in D(A)$, т.е. $((A-\lambda I)x, z) = 0$, т.е. $\exists z : \forall x((A-\lambda I)x, z) = 0$, т.е. $z \perp \overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)}$

Следствие 1.2.4.1. $\mathcal{H} = \mathcal{R}(A-\lambda I) \oplus Ker(A - \bar{\lambda} I)$

Теорема 1.2.5. *всякая $\lambda = \xi + i\eta, \quad \eta \neq 0$, есть регулярная точка самосопряженного оператора A.*

Доказательство. λ — регулярная точка, значит λ не собственное значение и $\exists (A-\lambda I)^{-1}$. Проверим ограниченность $(A-\lambda I)^{-1}$.

$$((A-\lambda I)f, (A-\lambda I)f) = (Af, Af) - 2\xi(Af, f) + |\lambda|^2 (f, f) =$$

$$(Af, Af) - 2\xi(Af, f) + \xi^2 (f, f) + \eta^2 (f, f) = ((A - \xi I)f, (A - \xi I)f) + \eta^2 (f, f) \geq$$
$$\geq \eta^2 ||f||^2$$

$$(A - \lambda I)f = g \qquad ||g||^2 \geq \eta^2 ||(A-\lambda I)^{-1} g|| \Rightarrow \frac{1}{\eta^2} \geq \frac{||(A-\lambda I)^{-1} g||}{||g||}$$

$(A-\lambda I)^{-1}$ ограничен, $|d((A-\lambda I)^{-1}) = Rr(A-\lambda I)$ и его можно распространить на $\overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)} = \mathcal{H}$ с сохранением нормы оператора, так как λ — не собственое значение.Если при этом $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ не замкнуто, то $(A-\lambda I)^{-1}$ не замкнут. Чтобы завершить доказательство, используем две теоремы, которые приведём без обоснования.

Теорема 1.2.6. *Линейный оператор обратный к замкнутому замкнут.*

Теорема 1.2.7. *Сопряженный оператор замкнут.Отсюда следует, что самосопряженный оператор замкнут.*

Таким образом как обратный к самосопряженному $(A-\lambda I)^{-1}$ замкнут, $\mathcal{R}(A-\lambda I) = \overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)} = \mathcal{H}$, оператор ограничен на $\mathcal{H}$ и λ —регулярная точка.

Замечание 1. Для самосопряженного оператора:

1) λ — собственное число $\Leftrightarrow \overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)} \neq \mathcal{H}$,

2) λ — точка непрерывного спектра $\Leftrightarrow \mathcal{R}(A-\lambda I) \neq \overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)} = \mathcal{H}$,

3) λ — регулярная точка $\Leftrightarrow \mathcal{R}(A-\lambda I) = \mathcal{H}$

Определение 20. Дискретный спектр — множество изолированных точек спектра кроме собственных значений бесконечной кратности.

Глава 2.

Интегральные уравнения.

2.1. Ряд Неймана.

Интегральным называют уравнение, в котором неизвестная функция $f(t)$ стоит под знаком интеграла.Следующие интегральные уравнения называются уравнениями Фредгольма

$$\begin{array}{ll} \lambda \int\limits_a^b K(s;t)f(t)\,dt = h(s) & \text{I рода} \\ f(s) - \lambda \int\limits_a^b K(s;t)f(t)\,dt = h(s) & \text{II рода} \end{array}$$

где K и h заданы.Рассмотрим сначала уравнение второго рода. Введём обозначение

$$Mf = \lambda \int\limits_a^b K(s;t)f(t)\,dt.$$

Тогда уравнение примет вид

$$f - Mf = h \tag{1}$$

Для разрешимости уравнения (1) достаточно выполнения условия $\|M\| < 1$.

$$\|M\| \le \left\| \lambda \int\limits_a^b K(s;t)\,dt \right\| = |\lambda| \left\| \int\limits_a^b K(s;t)\,dt \right\| = |\lambda| \sqrt{\int\limits_a^b \left| \int\limits_a^b K(s;t)\,dt \right|^2 ds} \le$$

$$\le |\lambda| \sqrt{\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b |K(s;t)|\,dt \right)^2 ds} \le |\lambda| \sqrt{\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(s;t)|^2\,dtds}$$

Итого, если $|\lambda| \sqrt{\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(s;t)|^2\,dsdt} < 1$, то интегральное уравнение Фредгольма II рода решается путём составления ряда.

$$(I - M)^{-1} = \sum_0^\infty M^n,$$

который называется рядом Неймана.

$$f_0 = h, \quad f_1 = h + Mh, \dots f_n = \sum_0^n M^k h$$

$$M^2 h(s) = \lambda^2 \int_a^b K_2(s;t) h(t)\, dt, \qquad K_2(s;t) = \int_a^b K(s;t_1) K(t_1;t)\, dt_1$$

$$K_n(s;t) = \int_a^b dt_1 \int_a^b dt_2 \dots \int_a^b dt_{n-1}\, K(s;t_1)K(t_1;t_2)\dots K(t_{n-1};t)$$

$K_n(s;t)$ — итерированное ядро.

$$f = \left(\sum_{n=0}^{\infty} M^n\right) h = h + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K^n h = h + \lambda R h \quad M = \lambda K$$

R — интегральный оператор с ядром $R(s;t;\lambda)$.Его называют резольвентой Фредгольма.

$$f(s) = h(s) + \lambda \int_a^b R(s;t;\lambda) h(t)\, dt$$

Упражнение 1. Найти резольвенту $R(s;t;\lambda)$ с помощью ряда Неймана, если a=0, b=1, $K(s;t) = st$

2.1.1. Вырожденные ядра.

Определение 21. Ядро называется вырожденным, если его можно представить в виде

$$K(s;t) = \sum_1^k a_i(s) b_i(t) \qquad a_i, b_i \text{ линейно независимы.}$$

Рассмотрим, как решать такое уравнение.

$$f(s) = \lambda \sum_1^n a_i(s) \int_a^b b_i(t) f(t)\, dt + h(s) = h(s) + \lambda \sum_1^n c_i a_i(s) \tag{$*$}$$

$$h(s) + \lambda \sum_1^n c_i a_i(s) = \lambda \sum_1^n a_i(s) \int_a^b b_i(t) \left(h(t) + \lambda \sum_1^n c_j a_j(t)\right) dt + h(s)$$

$c_i = \int_a^b b_i(t) \left(h(t) + \lambda \sum_1^n c_j a_j(t)\right) dt = \underbrace{\int_a^b b_i(t) h(t)\, dt}_{h_i} + \underbrace{\lambda \sum_1^n c_j \int_a^b a_j(t) b_j(t)\, dt}_{\sum e_{ij} c_j}$ Таким образом, задача свелась к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_i:

$$c_i = h_i + \sum_j e_{ij} c_j$$

или в векторной форме:

$$E\vec{c} = \vec{c} - \vec{h}, \qquad (I - E)\vec{c} = \vec{h}$$

Найдя c_i, подставляем их в $(*)$ и получаем решение интегрального уравнения.

Упражнение 2. Найти резольвенту 2-мя способами(ряд Неймана, вырожденные ядра), если a=-1, b=1, $K(s;t) = s^2t + st^2$

2.2. Ряды Фредгольма.

Вспомним ряд факторов из теории систем линейных алгебраических уравнений.

Теорема 2.2.1 (Альтернатива Фредгольма).
либо неоднородная система разрешима при любой правой части, либо соответствющее однородная система имеет нетривиальное решение.Если однородная система имеет нетривиальное решение, соответствующая неоднородная система разрешима, если правая часть ортогональна любому решению транспонированной однородной системы.

Теорема 2.2.2. *однородная линейная система и транспонированная к ней имеет одинаковое число линейно независимых решений.*

Оказывается, что такие же теоремы(Фредгольма) имеют место и для интегральных уравнений, доказательством чего мы и займёмся в этой главе.

Фредгольм заметил, что интегральное уравнение

$$f(s) - \lambda \int\limits_a^b K(s;t)f(t)\,dt = h(s)$$

имеет сходство с алгебраической системой.Действительно, если мы заменим интеграл на интегральную сумму(при разбиении $[a, b]$ на n равных частей), то получим систему:

$$f(t_j) - \lambda \sum_{i=1}^{n} K(t_j;t_i)f(t_i)\frac{b-a}{n} = h(t_j)$$

Решая её и анализируя предельный переход, можно получить резольвенту интегрального уравнения.Так и делал Фредгольм.Мы будем действовать более простым(но менее честным) путём.А именно, докажем, что резольвента имеет вид

$$R(s;t;\lambda) = \frac{D(s;t;\lambda)}{D(\lambda)}, \text{ где}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\lambda^n\frac{d_n}{n!}$$

$$d_n = \int\limits_a^b dt_1 \ldots \int\limits_a^b dt_n \begin{vmatrix} K(t_1;t_1) & \ldots & K(t_1;t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n;t_1) & \ldots & K(t_n;t_n) \end{vmatrix}$$

$$D(s;t;\lambda) = K(s;t) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n d_n(s;t)}{n!} \qquad (*)$$

$$d_n(s;t) = \int\limits_a^b dt_1 \ldots \int\limits_a^b dt_n \begin{vmatrix} K(s;t) & K(s;t_1) & \ldots & K(s;t_n) \\ K(t_1;t) & K(t_1;t_1) & \ldots & K(t_1;t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n;t) & K(t_n;t_1) & \ldots & K(t_n;t_n) \end{vmatrix} \qquad (**)$$

Сначала докажем соотношение для резольвенты, которое понадобится нам в дальнейшем.

Теорема 2.2.3. $R(s;t;\lambda) = K(s;t) + \lambda \int\limits_a^b R(s;t_1;\lambda)K(t_1;t)\,dt_1$

Доказательство.

$$R(s;t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s;t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b R(s;t_1;\lambda)K(t_1;t)\,dt_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b \lambda^{n-1} K_n(s;t_1)K(t_1;t)\,dt_1 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_{n+1}(s;t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s;t) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s;t) - \frac{1}{\lambda} K(s;t) = \frac{1}{\lambda} \left(R(s;t;\lambda) - K(s;t)\right)$$

Подставив полученный результат в исходное выражение, получим требуемое соотношение.

Теорема 2.2.4. *Ряд $D(\lambda)$ сходится при любом λ.*

Доказательство. Воспользуемся геометрическими соображениями (неравенством Адамара).
$d_n = V_{парал.} \le V_{прям.парал.} = \prod\limits_{j=1}^{n} \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} K^2(t_j;t_k)} \le K_{max}^n n^{n/2}$

Тогда ряд $D(\lambda) \le 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{K_{max}^n n^{n/2}}{n!} \sim 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{n^{n/2}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda e)^n \frac{1}{n^{\frac{n+1}{2}}}$ сходится.

Получим рекуррентную зависимость для коэффициентов $d_n(s;t)$ ряда $(*)$.

$$D(s;t;\lambda) = R(s;t;\lambda)D(\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(s;t;\lambda) = K(s;t)D(\lambda) + \lambda \int\limits_a^b D(s;t_1;\lambda)K(t_1;t)\,dt_1$$

$$D(s;t;\lambda) = K(s;t)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{d_n}{n!}\right) +$$

$$+\lambda \int\limits_a^b K(t_1;t)\left(K(s;t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{d_n(s;t_1)}{n!}\right)\,dt_1$$

подставляя ряд для $D(s;t;\lambda)$, получаем

$$d_n(s;t) = K(s;t)d_n - n \int\limits_a^b K(t;t_1)d_{n-1}(s;t_1)\,dt_1 \qquad (2)$$

Чтобы доказать, что $d_n(s;t)$ имеет вид (**), обозначим временно интеграл в правой части (**) $\tilde{d}_n(s;t)$ и покажем, что $\tilde{d}_n(s;t)$ удовлетворяет такому же, как (2), рекуррентному соотношению и, кроме того, $\tilde{d}_1(s;t) = d_1(s;t)$. Отсюда и будет следовать $d_n(s;t) = \tilde{d}_n(s;t) \quad \forall n$.Равенство при n=1 очевидно:

$$d_1(s;t) = \int\limits_a^b \begin{vmatrix} K(s;t) & K(s;t_1) \\ K(t_1;t) & K(t_1;t_1) \end{vmatrix} dt_1 = K(s;t)d_1 - K_2(s;t)$$

Получим теперь рекуррентное соотношение для $\tilde{d}_n(s;t)$.

$$\tilde{d}_n(s;t) = \int\limits_a^b dt_1 \ldots \int\limits_a^b dt_n \begin{vmatrix} K(s;t) & K(s;t_1) & \ldots & K(s;t_n) \\ K(t_1;t) & K(t_1;t_1) & \ldots & K(t_1;t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n;t) & K(t_n;t_1) & \ldots & K(t_n;t_n) \end{vmatrix} =$$

$$= K(s;t)d_n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+2}K(t_k;t) \begin{vmatrix} K(s;t_1) & K(s;t_2) & \ldots & K(s;t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_{k-1};t_1) & K(t_{k-1};t_2) & \ldots & K(t_{k-1};t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_{k+1};t_1) & K(t_{k+1};t_2) & \ldots & K(t_{k+1};t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n;t_1) & K(t_n;t_2) & \ldots & K(t_n;t_n) \end{vmatrix} =$$

Рассмотрим сумму по k.При $k = 2$ переобозначим $t_1 \to t_2$ и $t_2 \to t_1$. Переставив первый и второй столбцы, получим, что это с точностью до знака определитель при $k = 1$.Ракие же равенства получаются и для всех k. Таким образом в сумме суммируются n одинаковых определителей из которых получаются $\tilde{d}_{n-1}(s;t_1)$, что и даёт требуемое рекуррентное соотношение для $\tilde{d}_n(s;t)$, собпадающее с (2).Это и завершает доказательство.

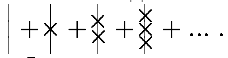
2.3. Диаграммная техника

Для работы со сложными формулами широко используется так называемая диаграммная техника. В соответствии с ней вводятся специальные значки для записи сложных выражений. Проиллюстрируем это на примере рядов Фредгольма. Будем изображать каждое ядро вертикальной линией $K(s,t) \longrightarrow$. Если есть два ядра K с общей переменной интегрирования, то рисуем две линии и соединяем их крестиком для обозначения соединения . Кроме того, каждому крестику ставим в соответствие множитель λ. Заметим, что каждый свободный конец диаграммы соответствует независимой переменной, например диаграмма имеет две независимые переменные, а - ни одной независимой переменной. Например,

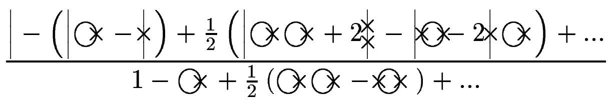
$$\lambda \int\limits_a^b K(s,s)\, ds \longrightarrow \;,$$

$$\lambda \int\limits_a^b K(t,t_1)K(s,s)\, ds \longrightarrow$$

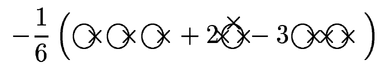
$$\lambda \int\limits_a^b K(s,t_1)K(t_1,t)\, dt_1 \longrightarrow \;.$$

В соответствии с введенными обозначениями ряд Неймана для резольвенты примет следующий вид: $R(s,t,\lambda) =$  .

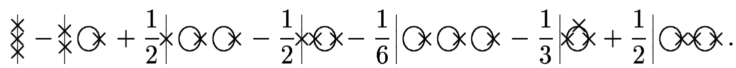
Решение Фредгольма в данных обозначениях выглядит следующим образом:

$$R(s,t,\lambda) = \frac{D(s,t,\lambda)}{D(\lambda)} =$$ 

при этом ряды в числителе и знаменателе строятся следующим образом. Каждый член в знаменателе, кроме 1, получается "соединением концов" в предыдущем члене в числителе, делением на число имеющихся K и изменением знака. Следующий член в числителе получается путем выделения членов нужного порядка по λ в произведении знаменателя на ряд Неймана. Для примера сконструируем следующую связь членов. Член третьего порядка в знаменателе получается соединением концов второго порядка в числителе. Результат имеет следующий вид:



Для нахождения члена третьего порядка в числителе соберем члены третьего порядка (с тремя крестиками) в произведении знаменателя на ряд Неймана. Получаем:



2.4. Характеристические значения

Пусть λ такое, что $D(\lambda) \neq 0$. Тогда решение неоднородного уравнения находим с помощью резольвенты: $f(s) = h(s) + \lambda \int\limits_a^b R(s,t,\lambda)h(t)\,dt$. Рассмотрим случай, когда $\lambda = \lambda_0$ есть корень знаменателя Фредгольма: $D(\lambda_0) = 0$. Используя соотношение $d_{n+1} = \int\limits_a^b d_n(s,s)\,ds$, получим формулу для $D'(\lambda)$:

$$D'(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^{n-1} \frac{d_n}{(n-1)!} = -d_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{d_{n+1}}{n!} =$$

$$= -d_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{\int\limits_a^b d_n(s,s)\,ds}{n!} = -\int\limits_a^b K(s,s)\,ds - \int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{d_n(s,s)}{n!}\,ds =$$

$$= -\int\limits_a^b \left(K(s,s) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{d_n(s,s)}{n!} \right) ds = -\int\limits_a^b D(s,s,\lambda)\,ds,$$

$$D_\lambda^{(k)} = -\int\limits_a^b D_\lambda^{(k-1)}(s,s,\lambda)\,ds \neq 0.$$

На основании этой формулы докажем, что если λ_0 в $R(s,t,\lambda) = \frac{D(s,t,\lambda)}{D(\lambda)}$ есть корень знаменателя, то это полюс $R(s,t,\lambda)$ (то есть если и в числителе тоже 0, то просто полюс меньшго порядка).

Пусть λ_0 - корень k-й кратности $D(\lambda)$. Тогда $D^{(k)}(\lambda) \neq 0$, следовательно $D_\lambda^{(k-1)}(s,s,\lambda) \neq 0$ (иначе интеграл был бы равен 0), т.е. λ_0 - корень не более чем $(k-1)$ кратности. Если это полюс порядка r, то имеет место разложение:

$$R(s,t,\lambda) = \frac{C_{-r}(s,t)}{(\lambda-\lambda_0)^r} + \frac{C_{-r+1}(s,t)}{(\lambda-\lambda_0)^{r-1}} + ..., \text{ причем } \qquad C_{-r}(s,t) \neq 0.$$

Теорема 2.4.1. *Как функция какой-нибудь одной переменной (s или t), $C_{-r}(s,t)$ удовлетворяет уравнению $\varphi(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$.*

Доказательство.

$$R(s,t,\lambda) = k(s,t) + \lambda \int\limits_a^b R(s,t_1,\lambda)K(t_1,t)\,dt_1$$

$$\frac{C_{-r}(s,t)}{(\lambda-\lambda_0)^r} + ... = K(s,t) - \lambda \int\limits_a^b \left(\frac{C_{-r}(t_1-t)}{(\lambda-\lambda_0)^r} + ...\right) K(s,t_1)\,dt_1$$

$$C_{-r}(s,t) + ... = K(s,t)(\lambda-\lambda_0)^r + \lambda \int\limits_a^b \left(C_{-r}(t_1,t) + ...\right) K(s,t_1)\,dt_1.$$

При $\lambda = \lambda_0$ имеем:

$$C_{-r}(s,t) = \lambda_0 \int\limits_a^b C_{-r}(t_1,t)K(s,t_1)\,dt_1,$$

$$C_{-r}(s,t) = \lambda_0 \int\limits_a^b C_{-r}(s,t_1)K(t_1,t)\,dt_1.$$

Теорема доказана.

2.4.1. Союзные интегральные уравнения

Определение 22. Уравнение $\psi(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(t,s)\psi(t)\,dt$ называется союзным интегральным уравнением к уравнению $\varphi(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$.

Определение 23. Число λ_0 называется характеристическим значением интегрального уравнения, если однородное уравнение $\varphi(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$ имеет нетривиальное (ненулевое) решение, а само это решение называется собственной функцией.

Таким образом все корни знаменателя (определителя Фредгольма) являются собственными значениями. Корни $D(\lambda)$ соответствуют характеристическим значениям (в обратную сторону тривиально).

Так как $D(\lambda)$ - целая (аналитическая на всей плоскости), то любая ограниченная область $\mathbf{C}$ содержит конечное число собственных значений интегрального уравнения (это тоже теорема Фредгольма).

Теорема 2.4.2. *Интегральное уравнение и союзное к нему имеют одни и те же характеристические значения.*

Замечание 1. собственное значение интегрального оператора$= \frac{1}{\text{характеристическое значение}}$.

Имеем это автоматически, так как $D(\lambda)$ - одинакова для простого и союзного уравнений.

Пример 9. Выясним, какова может быть кратность собственных функций.

$$\varphi_j(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b k(s,t)\varphi_j(t)\,dt$$

Пусть λ_0 соответствует линейно независимая ортонормированная система $\varphi_1(s), \varphi_2(s), ..., \varphi_n(s)$.

$$\frac{\overline{\varphi_j(s)}}{\lambda_0} = \int\limits_a^b \overline{K(s,t)} \cdot \overline{\varphi_j(t)}\,dt$$

$C_j = \frac{\overline{\varphi_j(s)}}{\lambda_0}$ - это коэффициент Фурье по системе $\{\varphi_j\}$ функции $\overline{K(s,t)}$ как функции аргумента t $(\sum C_n\varphi_n = f)$.

$\sum |C_n|^2 \leq \int\limits_a^b |f|^2\,ds$ - неравенство Бесселя.

Теорема 2.4.3. *Собственному значению соответствует не более чем конечное число собственных функций.*

Доказательство.

Допустим противное. По неравенству Бесселя

$$\int\limits_a^b \left|\overline{k(s,t)}\right|^2\,dt \geq \sum_{i=0}^{\infty} \left|\frac{\overline{\varphi_i(s)}}{\lambda_0}\right|^2$$

$$\left|\frac{\overline{\varphi_j(s)}}{\lambda_0}\right|^2 = \frac{\left|\overline{\varphi_j(s)}\right|^2}{|\lambda_0|^2}$$

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b \left|\overline{k(s,t)}\right|^2\,dt\,ds \geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_0|^2} \int\limits_a^b \varphi_i(s)\overline{\varphi_i(s)}\,ds = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_0|^2} = +\infty.$$

Таким образом $\int\limits_a^b\int\limits_a^b \left|\overline{k(s,t)}\right|^2\,dt = +\infty$ — противоречие, поэтому необходимо, чтобы $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_0|^2} < +\infty$, т.е. членов n штук (конечное число).

Теорема доказана.

Теорема 2.4.4. *У простого и у союзного интегральных уравнений одинаковое число линейно независимых собственных функций, отвечающих одному собственному значению.*

Доказательство.

Будем доказывать от противного:

$$\lambda_0 \to \varphi_1(s), \varphi_2(s), ..., \varphi_n(s)$$

$$\lambda_0 \to \psi_1(s), \psi_2(s), ..., \psi_m(s)$$

Пусть $n < m$. Рассмотрим вместо ядра $K(s,t)$ ядро $L(s,t) = K(s,t) - \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{\psi_j(s)} \cdot \overline{\varphi_j(s)}$. Для него получим:

$$\varphi(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b L(s,t)\varphi(t)\,dt \quad (*)$$

$$\psi(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b L(t,s)\psi(t)\,dt \quad (**)$$

Покажем, что $\int\limits_a^b \varphi(t)\overline{\varphi_j(t)}\,dt = 0$, если φ - решение уравнения $(*)$. Это уравнение легко переписать в виде:

$$\varphi(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt - \lambda_0 \int\limits_a^b \sum_{j=1}^{n} \overline{\psi_j(s)} \cdot \overline{\varphi_j(t)} \cdot \varphi(t)\,dt$$

$$\int\limits_a^b \varphi(s)\psi_k(s)\,ds = \int\limits_a^b \left[\lambda \int\limits_a^b K(s,t)\psi_k(s)\,ds\right] \varphi(t)\,dt - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int\limits_a^b \overline{\varphi_j(t)}\varphi(t)\,dt \int\limits_a^b \overline{\psi_j(s)}\psi_k(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_a^b \varphi(t)\psi_k(t)\,dt - \lambda_0 \int\limits_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi(t)\,dt$$

Таким образом, получается, что $\int\limits_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi(t)\,dt = 0$ (характеристическое значение не может быть равно 0). В силу этого условия уравнение $(*)$ можно переписать в виде $\varphi(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$. То есть φ — собственная функция, следовательно $\varphi(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(s) = 0$ и т.к. $\varphi(s) \perp \varphi_i$, то $\forall i: \ C_i = 0$. Значит $\varphi \equiv 0$.

Пусть ψ_m не содержится в наборе, тогда учитывая, что $\{\psi_j(s)\}$ образуют ортонормированную систему, получим:

$$\psi_m(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(t,s)\psi_m(t)\,dt$$

Отсюда находим, что $\psi(s) = \psi_m(s)$ (при $m > n$) удовлетворяет уравнению $(**)$. Получили противоречие: уравнение $(*)$ имеет только нулевое решение, а союзное с ним $(**)$ имеет решения, отличные от нулевого. Таким образом случай $n < m$ невозможен. Аналогичное рассуждение проводится и в случае $n > m$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.5 (Фредгольма).
λ_0 - характеристическое значение.

$$\varphi(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt \text{ - имеет нетривиальное решение.}$$

Нас интересует разрешимость уравнения $f(s) = g(s) + \lambda_0 \int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$. Оно разрешимо тогда и только тогда, когда $\int\limits_a^b g(s)\psi(s)\,ds = 0$, где ψ - решение союзного однородного уравнения.

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ $f(s) = g(s) + \lambda_0 \int\limits_a^b k(s,t)\varphi(t)\,dt$

$$\int\limits_a^b f(s)\psi(s)\,ds = \int\limits_a^b g(s)\psi(s)\,ds + \lambda_0 \int\limits_a^b f(t) \int\limits_a^b \psi(s)k(s,t)\,dt$$

$$\int\limits_a^b f(s)\psi(s)\,ds = \int\limits_a^b g(s)\psi(s)\,ds + \int\limits_a^b f(t)\psi(t)\,dt.$$

Следовательно $\int\limits_a^b g(s)\psi(s)\,ds = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$

$$f(s) = g(s) + \lambda_0 \int\limits_a^b L(s,t)f(t)\,dt = g(s) + \lambda_0 \int\limits_a^b k(s,t)f(t)\,dt - \lambda_0 \int\limits_a^b \left(\sum_{j=1}^n \overline{\psi_j(s)} \cdot \overline{\varphi_j(t)}\right) f(t)\,dt$$

$$\int\limits_a^b f(s)\psi_k(s)\,ds = \lambda_0 \int\limits_a^b f(t)\,dt \int\limits_a^b k(s,t)\psi_k(s)\,ds - \lambda_0 \int\limits_a^b f(t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt \int\limits_a^b \psi_k(s)\overline{\psi_k(s)}\,ds.$$

Т.о. получаем $\int\limits_a^b f(t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt = 0$, т.е. уравнение с ядром L разрешимо, тогда для ? верно. Подставляем это в начало, там интегралы обнуляются. Тогда получаем старое уравнение с K.

Теорема доказана.

Для $\chi(s) = \lambda_0 \int\limits_a^b \overline{k(t,s)}\chi(t)\,dt$ условия разрешимости изменяются: $\int\limits_a^b g(s)\overline{\chi(s)}\,ds = 0$.

Пример нахождение собственных функций

$K(s,t) = 1 + st \qquad a = 0, b = 1$

$$f(s) = \lambda \int\limits_0^1 (1+st)f(t)\,dt = \lambda \int\limits_0^1 f(t)\,dt + \lambda s \int\limits_0^1 tf(t)\,dt$$

Составим алгебраическую систему: $f(s) = \lambda c_1 + \lambda s c_2$

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_0^1 f(s)\,ds = \lambda c_1 + \frac{\lambda c_2}{2} \\ c_2 = \int\limits_0^1 s f(s)\,ds = \frac{\lambda c_1}{2} + \frac{\lambda c_2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{3} - 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = 8 \pm 2\sqrt{13}.$$

Далее находим C_1 и C_2 (они будут линейно зависимыми).

2.5. Интегральные уравнения с полярными ядрами

К этому типу относятся интегральные уравнения с ядром следующего вида:

$$|K(s;t)| = \frac{|L(s;t)|}{|s-t|^\alpha} \quad 0 < \alpha < 1; \quad L(s;t) - \textit{непрерывная}$$

Особенность при $s = t$ порядка не сильнее α.
$(s-t)^\alpha K(s;t)$ — непрерывное ядро.

Теорема 2.5.1 (Арцела-Асколи). $X = C[0,1]$ *метрическое пространство с метрикой* $\rho(f,g) = \max\limits_{t\in[0,1]} |f-g|$.$K \subset C[0,1]$ *относительно компактно тогда и только тогда, когда все функции, входящие в* K *равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.*

Замечание 1. Множество относительно компактно, если его замыкание компактно.

Можно показать, что для компактных операторов справедливы все теоремы Фредгольма.

Теорема 2.5.2. *для интегрального оператора с полярным ядром справедливы все теоремы Фредгольма.*

Доказательство. Доказательство основано на том факте, что оператор с полярным ядром компактен. Достаточно проверить, что
$\int\limits_a^b K(s;t)f(t)\,dt$ компактен. Пусть работаем в $C[a,b]$.Критерий компактности в теореме Арцела-Асколи.

1. равномерная ограниченность:
$\exists C : \forall U \in \Omega \quad |U(x)| \le C \quad \forall x \in [a,b]$

2. равностепенная непрерывность:
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad |t - t'| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t')| < \epsilon \forall f \in \Omega$

Компактный(вполне непрерывный) оператор переводит ограниченное множество в компактное множество.Итак, нужно доказать:

$$\Omega(f \in \Omega) \text{ ограничено, т.е. } |f(t)| < C \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall f \in \Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ множество } \left\{ \int\limits_a^b K(s;t)f(t)\,dt, f \in \Omega \right\} \text{ компактно.}$$

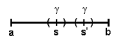


Рис. 2.1.

1. Сначала получим вспомогательную оценку для $\int\limits_c^d \frac{L(s;t)}{|s-t|^\alpha}\,dt$ (по $|c-d|$).

$$\left|\int\limits_c^d \frac{L(s;t)}{|s-t|^\alpha}\,dt\right| \le \int\limits_c^d \frac{|L(s;t)|}{|s-t|^\alpha}\,dt \le L^* \int\limits_c^d \frac{1}{|s-t|^\alpha}\,dt = L^* \int\limits_{c-s}^{d-s} \frac{1}{|t|^\alpha}\,dt =$$

$$= L^* \left(\int\limits_0^{c-s} \frac{1}{t^\alpha}\,dt + \int\limits_0^{d-s} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \right) = \frac{L^*}{1-\alpha}(|c-s|^{1-\alpha} + |d-s|^{1-\alpha}) \le$$

$$\le \frac{2L^*}{1-\alpha}|d-c|^{1-\alpha}$$

2. Докажем равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность.

а) равномерная ограниченность:

$\left|\int\limits_a^b K(s;t)f(t)\,dt\right| \le C\left|\int\limits_a^b K(s;t)\,dt\right| \le \frac{2CL^*}{1-\alpha}|b-a|^{1-\alpha}$

б) равностепенная непрерывность

Разобьём промежуток интегрирования следующим образом(рис. 2.1) Обозначим окрестность s Δ_1, а окрестность s'—Δ_2.Тогда интеграл по отрезку $[a,b]$ можно разбить на следующие части:

$$\left|\int\limits_a^b \dots\right| \le \left|\int\limits_{\Delta_1} \dots\right| + \left|\int\limits_{\Delta_2} \dots\right| + \left|\int\limits_{[a,b]\setminus(\Delta_1\cup\Delta_2)} \dots\right|$$

Отметим, что если интервалы Δ_1 и Δ_2 пересекаются, то неравенство всё равно имеет место. Для первых двух интегралов есть оценка $\frac{8MC}{1-\alpha}\gamma^{1-\alpha}$(сумма). За счёт выбора γ можем добиться того, что

$$\frac{8MC}{1-\alpha}\gamma^{1-\alpha} < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\int\limits_\Gamma \dots = \int\limits_\Gamma \frac{L(s;t)(s'-t)^\alpha - L(s';t)(s-t)^\alpha}{(s-t)^\alpha(s'-t)^\alpha}\,dt = \int\limits_\Gamma A(t)\,dt$$

где $\Gamma = [a,b]\setminus(\Delta_1\cup\Delta_2)$. Так как L непрерывна, то сближением s и s' можно уменьшить A так, что: $\int\limits_\Gamma A(t)\,dt < \frac{\epsilon}{2}$ для $|s'-s| < \delta$, поэтому для любого ϵ за счёт выбора $\delta(\epsilon)$ получаем нужный результат для любого f. Таким образом оператор компактен, следовательно теорема Фредгольма верна.

2.6. Уравнения Вольтерра.

$$f(s) = h(s) + \lambda \int\limits_a^s K(s;t)f(t)\,dt \quad \text{уравнение 2-го рода} \tag{1}$$

Справедлива ли теорема Фредгольма?
$K(s;t)$ — непрерывное ядро.Рассмотрим уравнение Фредгольма:

$$f(s) = h(s) + \lambda \int\limits_a^b L(s;t)f(t)\,dt$$

$$L(s;t) = \begin{cases} K(s;t), & t \le s \\ 0, & t < s \end{cases}$$

Рассмотрим $\alpha \in [0,1]$.$\frac{L(s;t)(s-t)^\alpha}{(s-t)^\alpha} = L(s;t)$, но $L(s;t)(s-t)^\alpha$ непрерывна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$.Таким образом ядро $L(s;t)$ полярное, значит теоремы Фредгольма верны для уравнений Вольтерра.

Теорема 2.6.1. *Для уравнений Вольтерра определитель Фредгольма не имеет корней.*

Доказательство. Уравнение (1) всегда имеет решения.Построим ряд Неймана и оценим его:
$|K_1(s;t)| = |K(s;t)| \le C$
$|K_2(s;t)| = \left|\int\limits_a^b K_1(s;t_1)K(t_1,t)\,dt_1\right| = \left|\int\limits_a^s K(s;t_1)K(t_1;t)\,dt_1\right| =$
$= \left|\int\limits_t^s K(s;t_1)K(t_1;t)\,dt\right| \le C^2(s-t)$
$|K_3(s;t)| = \left|\int\limits_a^s K(s;t_1)K_2(t_1;t)\,dt_1\right| \le \int\limits_a^s |K(s;t_1)|C^2(t_1-t)\,dt \le C^3\int\limits_t^s t_1\,dt_1-$
$-C^2\int\limits_t^s t\,dt_1 = C^3\frac{s^2-t^2}{2} - C^2t(s-t) \le C^3\frac{(s-t)^2}{2}$
$|K_4(s;t)| = \left|\int\limits_a^s K(s;t_1)K_3(t_1;t)\,dt_1\right| \le C_4\int\limits_t^s \frac{(t_1-t)^2}{2}\,dt_1 \le C_4\frac{(s-t)^3}{3!}$

$$|K_n(s;t)| \le C_n\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$|R(s;t;\lambda)| \le \lambda C\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}C^{n-1}\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda Ce^{\lambda C(s-t)}$ — это целая функция, поэтому полюсов нет, т.е. нет корней $D(\lambda)$.

2.6.1. Уравнения Вольтерра с разностным ядром.

Рассмотрим случай, когда ядро $K(s;t)$ зависит от разности аргументов:
$K(s;t) = K(s-t)$ т.е. уравнение имеет вид $f(s) = h(s) + \lambda\int\limits_0^s K(s-t)f(t)\,dt$
Для решения уравнений такого типа используют преобразование Лапласа:

$$(Lf)(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \tilde{f}$$

Вспомним некоторые его свойства:

$$1)\ \ L(\underbrace{\int\limits_0^s K(s-t)f(t)\,dt}_{\text{свёртка}})(p) = \tilde{K}\cdot\tilde{f}$$

2) Преобразование Лапласа простейших функций:
$L1(t) = \frac{1}{p} \qquad 1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$
$L(e^{at}) = \frac{1}{p-a}$
$L \sin at = \frac{a}{p^2+a^2}$
$L \cos at = \frac{p}{a^2+p^2}$
$Lt^n = \frac{n!}{p^{n+1}}$

3) $L(f^{(n)}(t)) = p^n \tilde{f}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$

4) $L(tf(t)) = -\frac{d\tilde{f}(p)}{dp}$

5) $L(e^{at} f(t)) = \tilde{f}(p-a)$

Упражнение 3.

1) Доказать (для уравнений с разностным ядром), что $R(s;t;\lambda) = R(s-t;\lambda)$.

2) Рассмотрим класс непрерывных функций на полуоси $[0,\infty)$, растущих не быстрее экспоненты, т.е. таких, что для любой f $|f| \leq Ce^{bt} \quad b \geq 0$. Покажите, что если K и h из этого класса, то решение f уравнения тоже из этого класса.

3) Найдите $\tilde{R}$

Если K и h из класса функций, к которым применимо преобразование Лапласа, то решение также принадлежит к этому классу.Таким образом мы имеем право применить преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (1).

$$\tilde{f}(p) = \tilde{h}(p) + \lambda \tilde{K}(p) \tilde{f}(p) \Rightarrow \tilde{f}(p) = -\frac{\tilde{h}(p)}{1 - \lambda \tilde{K}(p)}$$

Из теории функций комплексной переменной нам известна формула для обращения преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{f}(p) e^{pt} \, dp,$$

где интегрирование ведётся по такой прямой, относительно которой все особенности функции $\tilde{f}$ лежат с одной стороны.

Пример 10.

$$\begin{cases} \varphi'(x) - \varphi(x) + \int\limits_0^x (x-t)\varphi'(t)\, dt = x \\ \varphi(0) = -1 \end{cases}$$

$$p\tilde{\varphi}(p) + 1 - \tilde{\varphi}(p) + \tilde{x}(p\tilde{\varphi}(p) + 1) = \tilde{x}$$

$$(p - 1 + \frac{1}{p})\tilde{\varphi}(p) = -1$$

1) $\tilde{\varphi}(p) = -\frac{p}{p^2-p+1} \qquad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ p_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
$\varphi(t) = \sum Res \tilde{\varphi}(p) e^{pt}$

2) $-L^{-1}\left(\frac{p}{p^2-p+1}\right) = -L^{-1}\left(\frac{p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) =$

$= -L^{-1}\left(\frac{p-\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) - L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) = -e^{1/2t}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}$

Глава 3.

Уравнения математической физики

Сначала кратко рассмотрим примеры простейших уравнений трех различных типов, а затем рассмотрим общую ситуацию

3.1. Уравнение струны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad a = const$$

$U(x,t)$ - отклонение струны. a - зависит от упругости, и т.д.
Существуют два метода решения:

1) Метод бегущих волн;

2) Метод стоячих волн.

3.1.1. Метод бегущих волн (Метод Даламбера, характеристик)

Уравнение решается в явном виде через замену переменной.

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases} \implies \begin{array}{l} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ t = \frac{\eta-\xi}{2a} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial U}{\partial t} &= \tfrac{\partial U}{\partial \xi}\tfrac{\partial \xi}{\partial t} + \tfrac{\partial U}{\partial \eta}\tfrac{\partial \eta}{\partial t} = a\left(U'_\xi + U'_\eta\right) \Rightarrow \tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{\partial U}{\partial t} = \tfrac{\partial}{\partial t}\left(a\left(U'_\xi + U'_\eta\right)\right) = \\ &= a\left(U''_{\eta\xi}(-a) + U''_{\eta\eta}a - U''_{\xi\xi}(-a) - U''_{\xi\eta}a\right) - a^2\left(U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} - 2U''_{\xi\eta}\right). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U'_\xi + U'_\eta; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} = U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} + 2U''_{\xi\eta} \Rightarrow U''_{\xi\eta} = 0$$

$\left(U'_\xi\right)'_\eta = 0 \Rightarrow U'_\xi$ не зависит от $\eta \Rightarrow U'_\xi = \Theta(\xi)$ т.е.

$$U = \Theta_1(\xi) + \Theta_2(\eta) = \Theta_1(x - at) + \Theta_2(x + at)$$

Θ_1 описывает волну, бегущую вправо
$x - at = 0 \Rightarrow x = at$, т.е. "горб" движется вправо со скоростью a
Необходимо задание начальных условий:

$$\begin{cases} U(x,0)=\varphi(x) & \text{- форма струны в начальный момент} \\ U_t'(x,0)=\psi(x) & \text{- профиль скорости} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta_1(x)+\Theta_2(x)=\varphi(x) \\ -a\Theta_1'(x)+a\Theta_2'(x)=\psi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Theta_1(x)+\Theta_2(x)=\varphi(x) \\ -a\Theta_1(x)+a\Theta_2(x)=\int\limits_0^x \psi(s)ds \end{cases}$$

Таким образом $U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at}\psi(s)ds+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(s)ds$, или

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

Положение ступы в точке (x_0,t_0) определяется значениями в точках A и B и скоростью на отрезке AB

$x+at=x_0+at_0 \quad x-at=x_0-at_0$ (эти прямые называются характеристиками)

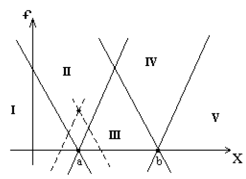


Рис. 3.1.

1) Пусть $\psi(x)=0, \quad \varphi(x)\neq 0$ на отрезке $[a,b]$ (проведем характеристики)

I,V - струна покоится

II - $U(x,t)=\frac{\varphi(x+at)}{2}$ - волна движется налево

IV - $U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}$ - волна движется направо

VI - $U(x,t)=0$ - полжение равновесия

III - две волны

2) $\varphi(x)=0 \quad \psi(x)\neq 0$ на отрезке $[\tilde{a},\tilde{b}]$

I,V - покой

II - $U(x,t)=\frac{x}{2a}\int\limits_{\tilde{a}}^{x+at}\psi(s)ds$ - волна движется налево (происходит изменение формы)

IV - аналогично II, направо

III - две волны

VI - $U(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\psi(s)ds$

Вопрос: Существуют ли начальные условия, при которых нет волны, бегущей в одну сторону.

Рис. 3.2.

Полубесконечная струна

1. Жесткое закрепление :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t'(x,0) = \psi(x) \\ U(0,t) = 0 \end{cases}$$

Если мы предполагаем наличие теоремы единственности для решения, то будем решать так: Устроим нечетное продолжение φ на всю ось x; тогда $\varphi(-at) + \varphi(at) = 0$ (всё хорошо); аналогично продолжим ψ : $\int\limits_{-at}^{at} \psi(s)ds = 0$

Реально наблюдается отражение с изменением фазы(см. рис. 3.3).

2. Свободное закрепление :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t'(x,0) = \psi(x) \\ U(0,t) = 0 \\ U_x'(0,t) = 0 \end{cases}$$ Для φ и ψ построим четное (по понятным причинам) продолжение.

Рис. 3.3. Жесткое и свободное закрепление.

Конечная струна :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U'_t(x,0) = \psi(x) \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \end{cases}$$

Здесь сначала строим нечетное продолжение относительно 0, а потом периодически с периодом 2l

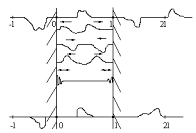


Рис. 3.4.

3.1.2. Метод стоячих волн (Фурье; разделение перменных)

$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ Условие: $\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x) \\ U'_t(x,0) = \psi(x) \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \end{cases}$

Попробуем искать решение в виде $U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

$X(x) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 T(t) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$

$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$, т.е. $\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = const = \lambda$

$$\begin{cases} T'' - \lambda a^2 T = 0 \\ X'' - \lambda X = 0 \end{cases}$$

1. $\lambda > 0 \quad \lambda = p^2 \quad T(t) = C_1 e^{-pat} + Ce^{pat}$ "нефизичное" решение - нарушается закон сохранения энергии.

2. $\lambda > 0 \quad \lambda = -p^2$

$\begin{cases} T(t) = C_1 \sin pat + C_2 \cos pat \\ X(x) = C_3 \sin px + C_4 \cos px \end{cases}$

Учитывая краевые условия:

$$\begin{cases} X = A \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \\ T = B \sin\left(\frac{\pi k t a}{l}\right) + C \cos\left(\frac{\pi k t a}{l}\right) \end{cases}$$

$U(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sin\left(\frac{\pi k a}{l} t\right) + C_k \cos\left(\frac{\pi k t a}{l}\right)\right) \sin \frac{\pi k x}{l}$

$U(x,0) = \varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{\pi k x}{l}; \quad C_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$

$U'_t(x,0) = \psi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\pi k a}{l} \sin \frac{\pi k x}{l}; \quad B_k = \frac{2}{\pi k a} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$

Для струны со свободными концами: $X = \cos \frac{\pi k x}{l}$

3.1.3. Вынужденные колебания струны

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t) \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t'(x,0) = \psi(x) \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \end{cases}$$

Пусть $U = V + W$ - по линейности уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t) \\ V(x,0) = V_t'(x,0) = 0 \\ V(0,t) = V(l,t) = 0 \end{cases} + \begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ W(x,0) = \varphi(x) \\ W_t'(x,0) = \psi(x) \\ W(0,t) = W(l,t) = 0 \end{cases}$$

Попробуем V искать в виде: $V(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l}$

$f(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k'' \sin \frac{\pi k x}{l} = -a^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k(t) \frac{\pi^2 k x}{l^2} \sin \frac{\pi k x}{l} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(V_k''(t) + \frac{\pi^2 k x}{l^2} a^2 V_k(t) - f_k(t) \right) \sin \frac{\pi k x}{l} = 0$

$\begin{cases} V_k''(t) + \frac{\pi^2 k x}{l^2} a^2 V_k(t) = f_k(t); \quad k = 1, 2, \dots \\ V_k(0) = 0 \quad V_k'(0) = 0 \end{cases}$

3.2. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Решим задачу для бесконечного стержня. $U(x,0) = \varphi(x)$ - начальное распределение температуры. Метод бегущих волн не работает. $-\infty < x < +\infty$

Рассмотрим задачу на всей оси. Имеем $U(x,t)$ в виде $U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''}{X(x)} = \lambda$

Пусть $\lambda = p^2 \Rightarrow T' - a^2 p^2 T = 0 \Rightarrow T = Ce^{a^2 p^2 t}$ - противоречит II-му закону термодинамики (передаётся от холодного к горячему)

Таким образом $\lambda = -\omega^2$

Тогда: $T = Ce^{-a^2 \omega^2 t}$; $\quad X = A \cos \omega x + B \sin \omega x$, ω - любое, тогда (пользуясь линейностью) $A = A(\omega)$ $B = B(\omega)$, и общее решение представляется в виде:

$$U(x,t) = \int\limits_0^{\infty} \left(A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x \right) e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega$$

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{+i\omega t} e^{a^2 \omega^2 t} d\omega; \quad C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx$$

$U(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-i\omega y} dy \right) e^{i\omega x} e^{-\alpha^2 \omega^2 t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-y)} e^{-\alpha^2 \omega^2 t} d\omega =$

$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha^2 t)\omega^2 + i(x-y)\omega} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) - \frac{1}{\alpha^2 t} \sqrt{\pi} e^{\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}}$

$$U(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2t}}\varphi(y)dy=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2t}}\varphi(y)dy$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2t}}\text{ - функция Грина уравнения теплопроводности}$$

Функция Грина является ядром обратного интегрального оператора, решающего уравнение.

Пусть $\varphi(x)\neq 0$ на отрезке $[\alpha;\beta]$ (а вне его 0):

$t=0$: прямоугольный импульс;

$t>0$: температура в <u>любой</u> точке оси отлична от нуля, т.е. температура распространяется с бесконечной скоростью. Это противоречие обусловлено тем, что уравнение теплопроводности не совсем точно описывает взаимодействие между молекулами (выход: усложнение уравнения).

Таким образом: 1) Возмущение распространяется бесконечно быстро; 2) Решение из любой функции (начальной) становится сразу же бесконечно дифференцируемым (в том случае, когда не опасно заносить производную под знак интеграла).

В случае струны: 1) Скорость конечна; 2) Гладкость начальных данных не изменяется.

Функция Грина: решение, даваемое точечным начальным источником.

А именно, пусть $\varphi(x)=\frac{1}{(\beta-\alpha)}$ на $[\alpha;\beta]$ и 0 вне его.

Тогда $U(x,t)\underset{\substack{\alpha\to y\\ \beta\to y}}{\longrightarrow}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$

$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}(\beta-\alpha)dy=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\int\limits_{0}^{\beta-\alpha}e^{\frac{2x\delta-\delta^2}{4a^2t}}(\beta-\alpha)d\delta=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$

3.3. Уравнение Лапласа.

(Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге)

$$\Delta U=0\qquad\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=0$$

Перейдем в полярные координаты и рассмотрим задачу

$\begin{cases}\Delta U=0\\ U(\rho;\varphi)\Big|_{\rho=R}=f(\varphi)\end{cases}$

$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}$

$U(r,\varphi)=R(r)\cdot\Phi(\varphi)$

$\Delta U=\Phi(\varphi)R''(r)+\frac{1}{2}\Phi(\varphi)R'(r)+\frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi)=0$

$r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+r\frac{R'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=const=\lambda$

Пусть $\lambda>0$; $\quad\lambda=p^2\qquad\Phi''+p^2\Phi=0;\quad\Phi=Ce^{ip\varphi}$

$\lambda<0$ - плохо $(\Phi=Ce^{p\varphi})$ - нет 2π-периодичности

$e^{p(\varphi+2\pi)}=e^{p\varphi}\Rightarrow e^{p\cdot 2\pi}=1\Rightarrow p\in\mathbb{Z}$

$r^2R''+rR'-p^2R=0$

$R=r^k\Rightarrow R'=kr^{k-1},\quad R''=k(k-1)r^{k-2}\Rightarrow k(k-1)+k-p^2=0\Rightarrow k^2=p^2$

Если $p=0:\quad rR''+R'=0\Rightarrow R=C_1\ln r+C_2$

Особенности в нуле быть не должно, поэтому, отбросив лишние решения, получаем:

$$U(r,\varphi)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}C(p)r^pe^{ip\varphi}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}C(p)e^{p(\ln r+i\varphi)}$$

$U(r,\varphi) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} r^p \left(A(p)e^{ip\varphi} + B(p)e^{-ip\varphi}\right)$

$U(R,\varphi) = f(\varphi) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} R^p \left(A(p)e^{ip\varphi} + B(p)e^{-ip\varphi}\right)$

$R^p A(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\psi f(\psi) e^{-ip\psi}$

$R^p B(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\psi f(\psi) e^{ip\psi}$

$$\begin{aligned} U(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^p \left(\int_0^{2\pi} d\psi f(\psi)e^{-ip\psi}e^{ip\varphi} + \int_0^{2\pi} d\psi f(\psi)e^{ip\psi}e^{-ip\varphi}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi f(\psi)\left(\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^p\left(e^{ip(\varphi-\psi)} + e^{ip(\psi-\varphi)}\right) + 1\right) \\ U(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi f(\psi)\left(1 + 2\frac{Rr\cos(\varphi-\psi) - r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\varphi-\psi)}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi f(\psi)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\varphi-\psi)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\varphi-\psi)} \text{ - ядро Дирихле}$$

Теперь решим в кольце.

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U\Big|_{r=1} = 1 \\ U\Big|_{r=2} = 2 \quad 1 \le r \le 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} \Phi(\varphi) = C_1(p)e^{ip\varphi} + C_2(p)e^{-ip\varphi} & p \in \mathbb{Z} \\ R(r) = C_3(p)r^p + C_4(p)r^{-p} & p \neq 0 \\ R(r) = C_5 \ln r + C_6 & p = 0 \end{array}$$

$U(r,\varphi) = \tilde{C}_3 \ln r + \tilde{C}_6 + \sum\limits_{p=1}^{\infty}\left(C_3 r^p + C_4 r^{-p}\right)\left(C_1(p)e^{ip\varphi} + C_2(p)e^{-ip\varphi}\right)$

$U(1,\varphi) = \tilde{C}_6 + \sum\limits_{p=0}^{\infty}(C_3 + C_4)\left(C_1(p)e^{ip\varphi} + C_2(p)e^{-ip\varphi}\right) = 1$

$$\tilde{C}_6 + \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty}\left(C_1(p)e^{ip\varphi} + C_2(p)e^{-ip\varphi}\right)}_{=0} = 1 \qquad C_6 = 1$$

$$U(2,\varphi) = \tilde{C}_5 \ln 2 + 1 + \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty}\left(C_3(p)2^p + C_4(p)2^{-p}\right)\left(C_1(p)e^{ip\varphi} + C_2(p)e^{-ip\varphi}\right)}_{=0}$$

$U(r,\varphi) = \frac{1}{\ln 2}\ln r + 1$

$$\tilde{C}_1(p) = \tilde{C}_2(p) = 0 \qquad \begin{array}{l} \tilde{C}_1(p) = C_1(p)(C_3(p) + C_4(p)) \\ \tilde{C}_2(p) = C_2(p)(C_3(p) + C_4(p)) \end{array}$$

$$\tilde{\tilde{C}}_1(p) = \tilde{\tilde{C}}_2(p) = 0 \qquad \begin{array}{l} \tilde{\tilde{C}}_1(p) = C_1(p)\left(C_3(p)2^p + C_4(p)2^{-p}\right) \\ \tilde{\tilde{C}}_2(p) = C_2(p)\left(C_3(p)2^p + C_4(p)2^{-p}\right) \end{array}$$

$$\begin{cases} C_3(p) + C_4(p) = 0 \\ 2^p C_3(p) + 2^{-p} C_4(p) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2^p & 2^{-p} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow C_3(p) = C_4(p) \equiv 0$$

(Поэтому в рядах все 0)

3.4. Классификация уравнений в частных производных второго порядка

3.4.1. Случай двух переменных

$$a_{11}U_{xx}+2a_{12}U_{xy}+a_{22}U_{yy}+b_1U_x+b_2U_y+C_1U=f(x,y) \qquad U_{xy}=U''_{xy}$$

Коэффициенты в общем случае зависят от координат x и y

Сделаем замену переменной: $\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$

$$U''_{xx}=\left(U'_\xi\xi'_x+U'_\eta\eta'_x\right)'_x=\left(U'_\xi\xi''_{xx}+U''_{\xi\xi}\left(\xi'_x\right)^2+U''_{\xi\eta}\xi'_x\eta'_x+U'_\eta\eta''_{xx}+U''_{\eta\eta}\left(\eta'_x\right)^2+U''_{\xi\eta}\xi'_x\eta'_x\right)$$

$$U''_{xy}=\left(U'_\xi\xi'_x+U'_\eta\eta'_x\right)'_y=\left(U'_\xi\xi''_{xy}+U''_{\xi\xi}\xi'_x\xi'_y+U''_{\xi\eta}\xi'_x\eta'_y+U'_\eta\eta''_{xy}+U''_{\eta\eta}\eta'_x\eta'_y+U''_{\xi\eta}\xi'_y\eta'_x\right)$$

Коэффициенты:
$$\begin{array}{lcl}
U''_{\xi\xi} & : & a_{11}\left(\xi'_x\right)^2+2a_{12}\xi'_x\xi'_y+a_{22}\left(\xi'_y\right)^2\\
U''_{\xi\eta} & : & 2a_{11}\xi'_x\eta'_x+2a_{12}\left(\xi'_x\eta'_y+\xi'_y\eta'_x\right)+2a_{22}\xi'_y\eta'_y\\
U''_{\eta\eta} & : & a_{11}\left(\eta'_x\right)^2+2a_{12}\eta'_x\eta'_y+a_{22}\left(\eta'_y\right)^2\\
U'_\xi & : & a_{11}\xi''_{xx}+2a_{12}\xi''_{xy}+a_{22}\xi''_{yy}+b_1\xi'_x+b_2\xi'_y\\
U'_\eta & : & a_{11}\eta''_{xx}+2a_{12}\eta''_{xy}+a_{22}\eta''_{yy}+b_1\eta'_x+b_2\eta'_y
\end{array}$$

Выберем замену так, что

$$a_{11}=\eta_x^2a_{11}+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2=0 \tag{1}$$

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dx\,dy+a_{22}(dx)^2=0 \tag{2}$$

Теорема 3.4.1. *$\eta=\varphi(x,y)$ - решение (1) $\iff \varphi(x,y)=C$ - интеграл (2)*

Доказательство.

$$\begin{cases}a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0\\ a_{11}\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\eta_x}{\eta_y}+a_{22}=0\end{cases}$$

$\eta=\varphi(x,y) \quad \varphi'_x+\varphi'_yy'_x=0 \quad y'_x=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ Необходимость доказана.

$\varphi(x,y)=C$ для $y(x):$ y' удовлетворяет (2) $\eta=\varphi(x,y)\Rightarrow y'=\frac{\eta_x}{\eta_y}$, т.е. такое η удовлетворяет (1). Достаточность доказана.

Теорема доказана.

Определение 24. Если $\varphi(x,y)$ полный интеграл уравнения (2), то кривые $\varphi(x,y)=C$ называются характеристиками.

Упражнение. При анализе уравнения струны это понятие уже вводилось. Поакжем, что противоречия здесь нет.

по старому опеделению	по новому определению
$U_{tt}=a^2U_{xx}$	$(dx)^2-a^2(dt)^2=0$
$U_{tt}-a^2U_{xx}=0$	$dx=\pm adt$
$x\pm at=const$	$d(x\pm at)=0$
	$x\pm at=const$

Что и требовалось показать.

Продолжим анализ уравнения (2):

$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0$
$y'_x = \frac{2a_{12} \pm \sqrt{4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}}}{2a_{11}} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$
Возможны три случая:

1) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Тогда имеются две вещественные характеристики в данной точке (т.к. a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят от координат) $\begin{cases} \varphi(x,y) = C \\ \psi(x,y) = C \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \eta = \varphi(x,y) \\ \xi = \psi(x,y) \end{cases}$

   Тогда обнулятся коэффициеты при $U_{\xi\xi}, U_{\eta\eta}$, и тогда уравнение в координатах (η, ξ) будет иметь вид:

   $$\tilde{a}_{12}U_{\xi\eta} = \Phi(U_\xi; U_\eta; U; f(\xi,\eta)) \text{ - гиперболическое уравнение}$$

   Можно привести к такому виду:

   $$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = \tilde{\Phi}(U_\xi; U_\eta; U; f(\xi,\eta)), \begin{cases} \alpha = \xi - \eta \\ \beta = \xi + \eta \end{cases}$$

2) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ Одна вещественная характеристика $\varphi(x,y)$. $\eta = \varphi(x,y)$ - "уничтожим" одну из переменных.

   Предложение 3.4.1. *Для любой другой координаты ξ имеем $\tilde{a}_{12} = 0$*

   Доказательство.
   $a_{11}\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right) + a_{22} = 0$
   $\frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-2a_{12} + \sqrt{4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}}}{2a_{11}} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$
   $\eta_x = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\eta_y$
   $\xi_y\eta_y a_{22} - \xi_x \frac{a_{12}}{a_{11}}\eta_y a_{11} + \xi_x\eta_y a_{12} - \xi_y\eta_y\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{12} = 0$
   $a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} = 0$ - условие выполнено для любого ξ
   Таким образом получили уравнение следующего вида:

   $$U_{\xi\xi} = \Phi(U_\xi; U_\eta; U; f(\xi,\eta)) \text{ - параболическое уравнение}$$

3) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$
   $y'_x = \frac{a_{12} + i\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$ комплексные характеристики $\varphi(x,y)$, $\overline{\varphi(x,y)}$
   В этих комплексных координатах уравнение придет к виду:

   $$U_{\xi\eta} = \Phi(U_\xi; U_\eta; U; f(\xi,\eta))$$

   Перейдем к вещественным координатам: $\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}$, $\beta = \frac{\xi-\eta}{2i}$, тогда

   $$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = \Phi(U_\alpha; U_\beta; U; f(\alpha,\beta)) \text{ - эллиптическое уравнение}$$

Предложение 3.4.2. *Классификация корректна (т.е. уравнение не меняет тип при замене координат), т.е. $\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}^2$ сохраняет знак.*

3.4.2. Случай n переменных

$$\sum_{i,j} a_{ij}U_{x_ix_j} + \sum_i b_iU_{x_i} + CU = f(x_1,\ldots) \quad a_{ij} = a_{ji}$$

$$\xi = \xi_i(x_1,\ldots,x_n) \qquad U_{x_i} = \sum_k U_{\xi_k}{\xi_k}'_{x_i} = \sum_k U_{\xi_k}\alpha_{ik}$$

$$U_{x_ix_j} = \sum_{k,p} U_{\xi_k\xi_p}\alpha_{ik}\alpha_{jp} + \sum_k U_{\xi_k}\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x_j}$$

Таким образом уравнение примет вид:

$$\sum_{k,p} U_{\xi_k\xi_p}\tilde{a}_{kp} + \sum_k U_{\xi_k}\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x_j}, \text{ где } \tilde{a}_{kp} = \sum_{ij} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jp}$$

Рассмотрим квадратичную форму $\sum\limits_{ij} a_{ij}y_iy_j$. Пусть делается линейная замена координат $y_i = \sum\limits_k \eta_k\alpha_{ik}$, тогда получаем форму $\sum\limits_{kp} \tilde{a}_{kp}\eta_k\eta_p$, и тогда $\tilde{a}_{kp} = \sum\limits_{ij} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jp}$ (т. е. коэффициенты при старших членах преобразуются так же, как коэффициенты квадратичной формы при линейной замене). А т.к. квадратичную форму можно привести к диагональному виду без перекрестных членов, то можно привести уравнение к виду, в котором присутствуют только вторые производные по одному аргументу. Алгебраический закон инерции квадратичных форм дает возможность классификации по знакам коэффициентов. Таким образом, мы получаем следующие виды уравнения:

1) $\sum\limits_i U_{\xi_i\xi_i} = F(U_{\xi_i}; U; f)$ - эллиптическое уравнение.

2) $U_{\xi_0\xi_0} - \sum\limits_{i\neq 0} U_{\xi_i\xi_i} = F(U_{\xi_i}; U; f)$ - гиперболическое уравнение.

3) $\sum\limits_{i=1}^{m} U_{\xi_i\xi_i} - \sum\limits_{i=m+1}^{n} U_{\xi_i\xi_i} = F(U_{\xi_i}; U; f)$ - ультрагиперболическое уравнение.

4) $\sum\limits_{i\neq 0} U_{\xi_i\xi_i} = F(U_{\xi_0}; U_{\xi_i}; U; f)$ - параболическое уравнение.

3.5. Теорема единственности для гиперболического уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right) + f(x,t) \tag{1}$$

Рассмотрим отрезок $[0,l]$. Введем краевые и начальные условия:

$$\begin{cases} (1) \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U'_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{$*$}$$

Пусть ρ и k непрерывны на $[0,l]$. Докажем единственность при условии, что U, U_{xt} и все производные, входящие в уравнение, непрерывны.

Пусть U_1, U_2 - решения задачи $(*)$. Тогда рассмотрим $V = U_1 - U_2, V \not\equiv 0$ и $\begin{cases} \rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial V}{\partial x}\right) \\ V(0,t) = V(l,t) = 0 \\ V(x,0) = V'_t(x,0) = 0 \end{cases}$

Введем $E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(\rho(x)(U_t')^2 + k(x)(U_x')^2\right) dx$

Докажем: $E(t) \not\sim t$ (энергия сохраняется)

$E_t'(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l (\rho(x)\cdot 2U_{tt}U_t + k(x)\cdot 2U_{xt}U_x)\, dx = \int\limits_0^l (\rho(x)U_t + k(x)U_{xt}U_x)\, dx$

$(k(x)U_xU_t)_x' = (k(x)U_x)_x'U_t + k(x)U_{tx}U_x$

$E_t'(t) = \underbrace{\int\limits_0^l \left(\rho(x)U_{tt}U_t - (k(x))_x'U_t\right) dx}_{=0} + \int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial x}(k(x)U_xU_t)\, dx = k(x)U_xU_t\Big|_0^l = (2) = k(x)\frac{\partial U(l,t)}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x} -$
$-k(x)\frac{\partial U(l,t)}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, т.е. $E(t) = const.$

Если решение $V(x,t)$ нетривиальное, тогда $E > 0$ (строго), но в начальный момент $E = 0$, поэтому нетривиальных решений не существует.

Рассмотрим другие краевые условия: $U_x'(0,t) = U_x'(l,t) = 0$.

Тогда $(2) = k(x)\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}(l,t) - k(x)\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}(0,t)$ т. е. энергия снова сохраняется.

Для трехмерного волнового уравнения $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\Delta U$ анализ аналогичен, только

$$E(t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{обл.} \left(\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + k(x)\left(\nabla U\right)^2\right) d\Omega$$

(Доказательство с помощью теоремы Грина или Остроградского-Гаусса)

3.6. Теорема единственности для параболического уравнения

$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$ Сводим к задаче $\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ V(0,t) = V(l,t) = 0 \\ V(x,0) = 0 \end{cases}$

Докажем принцип максимума для уравнения теплопроводности:

Теорема 3.6.1 (Принцип максимума). *Рассмотрим* $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ 0 \le x \le l \\ 0 \le t \le T \end{cases}$ *Тогда максимальное(минимальное) значение функции $U(x,t)$ достигается либо на $x = 0$, либо на $x = l$, либо на $t = 0$.*

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{\Gamma} U(x,t)$

Пусть $\exists(x_0,t_0) \notin \Gamma : U(x_0,t_0) = M + \delta > M, \delta > 0$

Т.е.: $\begin{cases} U_t'(x_0,t_0) \ge 0 \\ U_x'(x_0,t_0) = 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0,t_0) \le 0 \end{cases}$. Рассмотрим $V(x,t) = U(x,t) + \varepsilon(t_0 - t)$

$V(x_0,t_0) = U(x_0,t_0) = M + \delta > M$ (Чтобы получть противоречие)

Выберем ε так, чтобы максимум, больший, чем на границе, сократился: $\varepsilon < \frac{\delta}{2T}$, тогда:

$\begin{cases} V_t = U_t - \varepsilon \\ \frac{\partial V}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{cases}$ в точке (x_1,t_1) имеет максимум.

$\max\limits_{\Gamma} V \le M + \frac{\delta}{2}$; Таким образом $\exists(x_1,t_1) \notin \Gamma : V(x_1,t_1)$ имеет максимум.

$$\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{(x_1,t_1)} \ge 0; \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Big|_{(x_1,t_1)} \le 0 \qquad V_t = U_t - \varepsilon$$

$\frac{\partial U}{\partial t}(x_1,t_1) - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_1,t_1) = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}(x_1,t_1)}_{\geq 0} - a^2\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_1,t_1)}_{\geq 0} + \underbrace{\varepsilon}_{>0}$, т.е. $\frac{\partial U}{\partial t}(x_1,t_1) - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_1,t_1) > 0$, т.е. в точке (x_1,t_1) нарушается уравнение теплопроводности. Противоречие.

Теперь докажем теорему единственности: решение может быть только тривиальным, т.к. на всей границе оно нулевое (из начальных условий), поэтому $V = U_1 - U_2 \equiv 0$, т.е. $U_1 \equiv U_2$ для любых двух решений.

Теорема доказана.

Следствие 1. Рассмотрим две задачи: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \\ U(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases}$ (1) $\quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \\ U(x,0) = \varphi_2(x) \end{cases}$ (2)
и $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$

Тогда $U_1(x,t) \leq U_2(x,t)$

Следствие 2. Непрерывная зависимость решения уравнения теплопроводности от начальных данных: $||\varphi_2(x) - \varphi_1(x)||_{C[0,l]} \leq \varepsilon \Longrightarrow ||U_2(x,t) - U_1(x,t)|| \leq \varepsilon$

Чтобы обосновать возможность применения метода Фурье, нужно доказать полноту системы функций.

3.7. Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) \qquad (*)$$

$\frac{1}{p_0(x)}, p_1(x), \ldots, p_n(x)$ - непрерывные, $x \in [a,b]$

$U_j(y) = \alpha_0^{(j)}(a) + \alpha_1^{(j)}y'(a) + \ldots + \alpha_{n-1}^{(j)}y^{(n-1)}(a) + \beta_0^{(j)}y(b) + \ldots + y^{(n-1)}\beta_{n-1}^{(j)} = 0 \qquad j = 1..n$

L действует на функцию в соответствии с выражением $(*)$, в его область определения входят функции, удовлетворяющие условиям $U_j \quad j = 1..n$

Определение 25. Функция Грина: $G(x,\xi)$ - это функция двух переменных, n раз дифференцируемая на $[a,\xi)$ и $(\xi,b]$; на всем промежутке $[a,b]$ непрерывна, и ее производные до $(n-2)$ порядка включительно также на всем промежутке $[a,b]$ непрерывна; У $(n-1)$ производной в точке ξ скачок:

$\frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x,\xi)\Big|_{\xi+0} - \frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x,\xi)\Big|_{\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}$;

$lG = 0; \quad U_j(G) = 0 \quad j = 1..n$

Теорема 3.7.1. *Если $Ly = 0$ имеет только тривиальное решение, то существует функция Грина оператора L.*

Замечание 1. Кажущегося противоречия нет, так как функция Грина имеет разрывную $(n-1)$ производную, а n-ной не имеет.

Доказательство(конструктивное). Пусть $\{y_i\}$ - фундаментальная система решений $ly = 0$.

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + \ldots + a_ny_n(x) & a \leq x < \xi \\ b_1y_1(x) + b_2y_2(x) + \ldots + b_ny_n(x) & \xi < x \leq b \end{cases}$$

Найдем $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$

$$\sum a_i \frac{\partial^{(n-1)}y_i}{\partial x^{(n-1)}}\Big|_\xi - \sum b_i \frac{\partial^{(n-1)}y_i}{\partial x^{(n-1)}}\Big|_\xi = \frac{1}{p_0(\xi)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\frac{\partial^{(n-1)}y_i}{\partial x^{(n-1)}}\Big|_\xi=\frac{1}{p_0(\xi)}\qquad a_i-b_i=c_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\partial^{(n-1)}y_i}{\partial x^{(n-1)}}\Big|_\xi=\frac{1}{p_0(\xi)}$$

$$\begin{aligned}U_j(G)= &\ \alpha_0^{(j)}\left(a_1y_1(a)+\ldots+a_ny_n(a)\right)+\\ &+\alpha_1^{(j)}\left(a_1y_1'(a)+\ldots+a_ny_n'(a)\right)+\ldots+\\ &+\alpha_n^{(j)}\left(a_1y_1^{(n)}(a)+\ldots+a_ny_n^{(n)}(a)\right)+\\ &+\beta_0^{(j)}\left(b_1y_1(b)+\ldots+b_ny_n(b)\right)+\ldots+\\ &+\beta_n^{(j)}\left(b_1y_1^{(n)}(b)+\ldots+b_ny_n^{(n)}(b)\right)=0\end{aligned}\qquad(**)$$

Так как $y_i(x)$ - решения уравнения, то

$U_j(G)=\alpha_0^{(j)}\left(c_1y_1(a)+\ldots+c_ny_n(a)\right)+\ldots+\alpha_n^{(j)}\left(c_1y_1^{(n)}(a)+\ldots+c_ny_n^{(n)}(a)\right)=0$

Из условия существования производной до $(n-2)$ порядка:

$$\begin{cases}a_1y_1(\xi)+\ldots+a_ny_n(\xi)=b_1y_1(\xi)+\ldots+b_ny_n(\xi)\\ \ldots\\ a_1y_1^{(n-1)}(\xi)+\ldots+a_ny_n^{(n-1)}(\xi)=b_1y_1^{(n-1)}(\xi)+\ldots+b_ny_n^{(n-1)}(\xi)+\frac{1}{p_0(\xi)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_1y_1(\xi)+\ldots+c_ny_y(\xi)=0\\ \ldots\\ c_ny_n^{(n-1)}(\xi)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(\xi)=\frac{1}{p_0(\xi)}\end{cases}$$

Получилась система:

$$\begin{pmatrix}y_1(\xi)&\ldots&y_n(\xi)\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ y_1^{(n-1)}(\xi)&\ldots&y_n^{(n-1)}(\xi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \ldots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \ldots\\ \frac{1}{p_0(\xi)}\end{pmatrix}$$

Система разрешима, т.к. определитель ее - определитель Вронского; $y_1\ldots y_n$ - линейнонезависимые, поэтому вронскиан не равен нулю ни в одной точке. Таким образом мы нашли $c_1,\ldots,c_n$.

Перепишем $(**)$: $U_j(G)=\alpha_0^{(j)}\left(a_1y_1(a)+\ldots+a_ny_n(a)\right)+\ldots+\alpha_n^{(j)}\left(a_1y_1^{(n-1)}(a)+\ldots+a_ny_n^{(n-1)}(a)\right)+$ $+\beta_0^{(j)}\left(a_1y_1(b)+\ldots+a_ny_n(b)\right)+\ldots+\beta_n^{(j)}\left(a_1y_1^{(n-1)}(b)+\ldots+a_ny_n^{(n-1)}(b)\right)+\beta_0^{(j)}\left(c_1y_1(b)+\ldots+c_ny_n(b)\right)+$ $+\ldots+\beta_n^{(j)}\left(c_1y_1^{(n-1)}(b)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(b)\right)=0$

$$\begin{aligned}&a_1\left(\alpha_0^{(j)}y_1(a)+\ldots+\alpha_n^{(j)}y_1^{(n-1)}(a)+\beta_0^{(j)}y_1(b)+\ldots+\beta_n^{(j)}y_1^{(n-1)}(b)\right)+\ldots+\\ &+a_n\left(\alpha_0^{(j)}y_n(a)+\ldots+\alpha_n^{(j)}y_n^{(n-1)}(a)+\beta_0^{(j)}y_n(b)+\ldots+\beta_n^{(j)}y_n^{(n-1)}(b)\right)=\\ &=-\left(c_1\left(\beta_0^{(j)}y_1(b)+\ldots+\beta_n^{(j)}y_1^{(n-1)}(b)\right)+\ldots+c_n\left(\beta_0^{(j)}y_n(b)+\ldots+\beta_n^{(j)}y_n^{(n-1)}(b)\right)\right)\end{aligned}$$

$\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k^{(j)}y_i^{(k)}(a)+\sum\limits_{k=0}^{n}\beta_k^{(j)}y_i^{(k)}(b)\right)=-\sum\limits_{i=0}^{n}c_i\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\beta_k^{(j)}y_i^{(n)}(b)\right)$ - система для a_i

$$K\vec{a}=\vec{\lambda}\qquad K_{ij}=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(i)}y_j^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}\beta_k^{(i)}y_j^{(k)}(b)$$

$$\lambda_i=-\sum_{j=0}^{n}c_j\sum_{k=0}^{n}\beta_k^{(i)}y_j^{(k)}(b)$$

Пусть $\det K=\det\begin{pmatrix}U_1(y_1)&U_1(y_2)&\ldots\\ U_2(y_1)&U_2(y_2)&\ldots\\ \ldots\end{pmatrix}=0$

$\begin{cases} U_1(\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n) = 0 \\ \ldots \\ U_n(\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ $\exists$ нетривиальные решения, удовлетворяющие краевым условиям, что противоречит условию теоремы.

Таким образом находим a_i и b_i.

Теорема доказана.

Теорема 3.7.2. $Ly = 0 \Rightarrow y = 0$. *Тогда существует обратный оператор* L^{-1}; L^{-1} - *интегральный оператор с ядром* $G(x,\xi)$

Доказательство. $Ly = f \qquad y(x) = \int\limits_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$

Удовлетворяет краевым условиям: тривиально.

$$Ly = p_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i(x) \int\limits_a^b G^{(n-i)}(x,\xi)f(\xi)d\xi + p_0(x)\left(\int\limits_a^\xi G^{(n)}(x,\xi)f(\xi)d\xi + \int\limits_\xi^b G^{(n)}(x,\xi)f(\xi)d\xi\right)$$

$$\int\limits_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi = \int\limits_a^x (a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + \ldots + a_ny_n(x))f(\xi)d\xi + \int\limits_x^b (b_1y_1(x) + \ldots + b_ny_n(x))f(\xi)d\xi =$$

$$(a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + \ldots + a_ny_n(x))\int\limits_a^x f(\xi)d\xi + (b_1y_1(x) + \ldots + b_ny_n(x))\int\limits_x^b f(\xi)d\xi$$

$$\left(\int\limits_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi\right)^{(n-1)} = \left(\int_a^x \frac{\partial^{(n-2)}G}{\partial x^{(n-2)}}(x,\xi)f(\xi)d\xi)\right)' + \left(\int_x^b \frac{\partial^{(n-2)}G}{\partial x^{(n-2)}}(x,\xi)f(\xi)d\xi)\right)' =$$

$$= \int\limits_a^x \frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x,\xi)f(\xi)d\xi + \frac{\partial^{(n-2)}G}{\partial x^{(n-2)}}(x,\xi)f(\xi)\Big|_{\xi=x-0} + \int\limits_x^b \frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x,\xi)f(\xi)d\xi - \frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x,\xi)f(\xi)\Big|_{\xi=x+0}$$

$$\left(\int\limits_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi\right)^{(n)} = \int_a^x \frac{\partial^{(n)}G}{\partial x^{(n)}}(x,\xi)f(\xi)d\xi) + \int_x^b \frac{\partial^{(n)}G}{\partial x^{(n)}}(x,\xi)f(\xi)d\xi) + \frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x,\xi)f(\xi)\Big|_{\xi=x-0} -$$

$$-\frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x,\xi)f(\xi)\Big|_{\xi=x+0} = \int_a^x \frac{\partial^{(n)}G}{\partial x^{(n)}}(x,\xi)f(\xi)d\xi) + \int_x^b \frac{\partial^{(n)}G}{\partial x^{(n)}}(x,\xi)f(\xi)d\xi) + \frac{1}{p_0(x)}f(x)$$

Тогда $Ly = \int\limits_a^x \underbrace{(LG)}_{0}(x,\xi)f(\xi)d\xi + \int\limits_x^b \underbrace{(LG)}_{0}(x,\xi)f(\xi)d\xi + \frac{1}{p_0(x)}p_0(x) = f(x)$

Теорема доказана.

$Ly - \lambda y = f \qquad (Ly = 0 \Rightarrow y = 0) \Rightarrow \exists G$

$y - \lambda \int\limits_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi = \underbrace{\int\limits_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi}_{н(x)}$ - интегральное уравнение Фредгольма

$y_0 - \lambda_0 \int\limits_a^b G(x,\xi)y_0(\xi)d\xi = 0 \qquad \lambda_0$ - характеристическое значение; y_0 - соответствующая собственная функция.

При этом λ_0 - собственное значение уравнения $Ly - \lambda y = 0$

Мы знаем, что:

1) Происходит накопление собственных чисел на бесконечности;

2) Их счётное количество

(переговариваем теорему Фредгольма для интегрального уравнения на случай $Ly - \lambda y = f$)

L - самосопряженный $\Longleftrightarrow$ обратный к нему самосопряженный, т.е. $G(x,\xi) = G(\xi,x)$

Самосопряженные интегральные операторы допускают не любые краевые условия. Для самосопряженного вполне непрерывного оператора система собственных функций полна (теорема Гильберта-Шмидта). Таким образом, полнота системы собственных функций позволяет применять метод Фурье.

Ортогональны — если соответстветствуют различным собственным числам, если одному — то в любом случае их конечное число, и их конечномерное подпространство ортогонализуется. Таким образом метод Фурье обоснован.

3.8. Аналитические свойства функции Грина как функции λ

Рассмотрим оператор $L-\lambda$ на $[a,b]$

$\begin{cases} Ly-\lambda y=f \\ U_j(y)=0 \end{cases}$

$y_i(x,\lambda)$ - фундаментальная система решений $Ly_i=\lambda y_i$

$y_i^{(j)}(a,\lambda)=\begin{cases} 0, & j\neq i-1 \\ 1, & j=i-1 \end{cases}$

Метод вариации произвольной постоянной:

$y(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i y_i(x)+\int\limits_a^b d\xi f(\xi)\sum\limits_{i=1}^{n}y_i(x)\frac{W_i(\xi)}{W(\xi)}$

$y(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i y_i(x)-\int\limits_x^b d\xi f(\xi)\sum\limits_{i=1}^{n}y_i(x)\frac{W_i(\xi)}{W(\xi)}$

$W=\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix}$ $\qquad W_i$ - алгебраическое дополнение элемента $(1,i)$

Получили: $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i y_i(x)+\int\limits_a^b d\xi f(\xi)g(x,\xi)$

$g(x,\xi)=\frac{\pm 1}{2W}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \end{vmatrix}$ $\quad \begin{matrix} ''+''-x>\xi \\ ''-''-x<\xi \end{matrix}$

Наложим краевые условия:

$0=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i U_j(y_i)+\int\limits_a^b d\xi f(\xi)U(g)$

Найдя c_i (n уравнений, n неизвестных):

$$y=\int\limits_a^b d\xi f(\xi)G(x,\xi,\lambda)$$

$G(x,\xi,\lambda)=\frac{(-1)^n H(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

$$H(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & g(x,\xi) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Пусть λ_0 простой корень $\Delta(\lambda)$. Тогда он является не более, чем простым полюсом G. Тогда:

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{r(x,\xi)}{\lambda-\lambda_0}+\tilde{G}(x,\xi,\lambda)$$

$r(x,\xi) = \frac{(-1)^n H(x,\xi,\lambda_0)}{\Delta(\lambda_0)}$

$H(x,\xi,\lambda_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k y_k(x)$, т.е. мы получили, что H как функция от x удовлетворяет однородному уравнению.

$LH - \lambda_0 H = 0 \qquad U_j(H) = 0$

$r(x,\xi) = \tilde{r}(\xi) y_0(x)$

L^* соответствует функция Грина $\overline{G(x,\xi,\lambda)}$

$\overline{G(x,\xi,\lambda)} = \frac{\overline{r(\xi,x)}}{\overline{\lambda} - \overline{\lambda}_0} + \overline{\tilde{G}(x,\xi,\lambda)}$

$\tilde{r}(\xi) = C\overline{z_0(\xi)} \qquad C = const \not\sim \xi, x$

Таким образом функция Грина в окрестности простого полюса представляется в виде

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{C y_0(x)\overline{z_0(\xi)}}{\lambda - \lambda_0} + \tilde{G}(x,\xi,\lambda)$$

Вопрос: как найти C?

$(\lambda - \lambda_0)\int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda) y_0(\xi) d\xi = C\int\limits_a^b y_0(x) y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)} d\xi + (\lambda - \lambda_0)\int\limits_a^b \tilde{G}(x,\xi,\lambda) y_0(\xi) d\xi$

$\int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda) y_0(\xi) d\xi = (L-\lambda)^{-1} y_0(x) = \frac{y_0(x)}{\lambda_0 - \lambda}$

$C\int\limits_a^b y_0(x) y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)} d\xi = -y_0(x)$

$$C = -\frac{1}{\int\limits_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)} d\xi}$$

3.9. Формулы Грина

Область Ω, гладкая граница – $\partial\Omega$

1) $\iiint\limits_{\Omega} U\Delta V d\Omega = \iint\limits_{\partial\Omega} U\frac{\partial V}{\partial\eta} dS - \iiint\limits_{\Omega} \nabla U \nabla V d\Omega$

2) $\iiint\limits_{\Omega} (U\Delta V - V\Delta U) d\Omega = \iint\limits_{\partial\Omega} (U\frac{\partial V}{\partial\eta} - V\frac{\partial U}{\partial\eta}) dS$

Цель — получить формулу для значения функции внутри области через интегралы по поверхности.

$r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

$V = \frac{1}{r_{MM_0}} \qquad \Delta\frac{1}{r_{MM_0}}$ во всех точках, где $r_{MM_0} > 0$

Рассмотрим $\Omega\backslash B_\varepsilon: -\iiint\limits_{\Omega\backslash B_\varepsilon} \frac{1}{r}\Delta U d\Omega = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(U\frac{\partial 1/r}{\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) dS + \iint\limits_{\partial B_\varepsilon} \left(U\frac{\partial 1/r}{\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) dS$

$\varepsilon \to 0: -\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r}\Delta U d\Omega = \iint\limits_{\partial B_\varepsilon} -\left(U\frac{\partial 1/r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) dS = \iint\limits_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{U}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) r^2 \sin\theta d\varphi d\theta = \iint U\sin\theta d\varphi d\theta +$
$+ \iint r\frac{\partial U}{\partial r}\sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi U(M_\varepsilon) + \varepsilon\frac{\partial U}{\partial r}(M'_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 4\pi U(M_0)$

$\delta U(M_0) = -\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r}\Delta U d\Omega - \iint\limits_{\Omega} \left(U\frac{\partial 1/r}{\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) dS$

$\delta = \begin{cases} 4\pi, M_0 \text{ внутри} \\ 2\pi, M_0 \text{ на границе} \\ 0, M_0 \text{ вне} \end{cases}$

$U(M) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - U\frac{\partial 1/r}{\partial\eta}\right) dS - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r}\Delta U d\Omega$

1) U гармонич. в Ω. Тогда $\Delta U = 0$

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\eta} - U\frac{\partial 1/r}{\partial\eta}\right)dS$$

2) U гармонич. в Ω. Тогда $\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial U}{\partial\eta}dS = 0$

Рассмотрим $V \equiv 1$ $\qquad \iiint\limits_{\Omega}(U\cdot 0 - 1\cdot\Delta U) = \iint\limits_{\partial\Omega}(U\cdot 0 - \frac{\partial u}{\partial\eta})dS$

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}dS = 0$$

3) Пусть Ω – шар радиуса R с центром в точке M. Тогда $U(M) = \frac{\iint\limits_{\partial\Omega}UdS}{4\pi R^2}$

Доказательство. $U(M) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\eta} - U\frac{\partial 1/r}{\partial\eta}\right)dS = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\substack{\varphi\in[0,2\pi]\\ \psi\in[0,\pi]}}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{1}{R^2}U\right)dS =$

$= \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}dS + \frac{1}{4\pi R^2}\iint UdS$, т.е. $U(M) = \frac{\iint\limits_{\partial\Omega}UdS}{4\pi R^2}$

4) U гармонич. $\Rightarrow U$ достигает $\max/\min$ значения на границе области (принцип максимума).

Доказательство. Пусть M_1 внутри области; тогда, построив шар радиуса ε, получим: $4\pi\varepsilon^2 U(M_1) = \iint\limits_{\partial\Omega'}UdS$, т.е. на всей сфере $U\Big|_{\partial\Omega'} = U(M_1)$ иначе противоречие с максимумом $U(M_1)$, т.е. $U = U(M_1)$ для всего шара Ω_i. Для $\forall M_2\in\Omega\neq M_1$ можно провести кривую, соединяющую M_1 и M_2, тогда ее можно покрыть шарами так, что 1) $\Omega_i\in\Omega$ 2) центр Ω_{i+1} лежит в Ω_i (достаточно вять $r_i = \min\{$расстояние от кривой до границы области$\}$). Кривая конечной длины, поэтому мы достигнем M_2, т.е. $U(M_2) = U(M_1)\quad\forall M_2\in\Omega$, т.е. $U\equiv const$ во всей области.

Теорема 3.9.1. *Единственность решения задачи Дирихле.*

Пусть φ_1 и ψ_1 - решения. $\varphi = \varphi_1 - \psi_1$ $\quad\begin{cases}\Delta U = 0\\ U\Big|_{\partial\Omega} = f\end{cases}$

На границе $\varphi\Big|_{\partial\Omega}\equiv 0$, тогда по принципу максимума $\varphi\Big|_{\Omega}\equiv 0$, т.е.$\varphi_1\equiv\psi_1$

Единственность внешней задачи Дирихле требует дополнительного условия $U\Big|_{\infty}\to 0$

$\begin{cases}\Delta U = 0\\ \frac{\partial U}{\partial\eta}\Big|_{\partial\Omega} = f\end{cases}$

Ясно, что единственности решения нет.

1) Для того, чтобы задача была разрешима: $\iint\limits_{\partial\Omega}fdS = 0$

2) Ясно, что $U + const$ - решение, если U - решение.

3.10. Теория потенциалов

3.10.1. Объемный потенциал

Определение 26. Объемным потенциалом (потенциалом объемных масс) называется интеграл

$$U(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\mu(\zeta,\eta,\xi)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где μ — плотность потенциала, а

$$r = \sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2}.$$

Теорема 3.10.1. *Если плотность потенциала μ непрерывна, то U — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция.*

Доказательство. Трудность состоит в том, что подынтегральная функция имеет особенность. Введем функцию

$$b_\varepsilon(r) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & r\ = \varepsilon \\ \alpha + \beta r^2, & r < \varepsilon\ , \end{cases}$$

где α и β выберем так, чтобы $b_\varepsilon(r)$ была непрерывно дифференцируема. Используя эту функцию, мы получим новый интеграл

$$\widetilde{U}_b(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \mu(\zeta,\eta,\xi) b_\varepsilon(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

который, очевидно, непрерывен. Тогда рассмотрим разность интегралов

$$U - \widetilde{U}_b = \iiint\limits_{B_\varepsilon} \mu(\xi,\eta,\zeta) \left(\frac{1}{r} - b_\varepsilon(r)\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Если мы докажем, что эта разность равномерно мала, то функция U также будет непрерывной.

Таким образом, нам нужно:

1) выбрать α и β;

2) установить, что $U - \widetilde{U}_b \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Так как по условию теоремы μ непрерывна в Ω, то она ограничена. Возьмем $\alpha = \frac{3}{2\varepsilon}$, $\beta = -\frac{1}{2\varepsilon^3}$. Тогда, сшивая вместе функцию и ее производную, получим систему

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} = \alpha + \beta\varepsilon^2 & - \text{ функция;} \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} = 2\beta\varepsilon & - \text{ производная.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\left|U - \widetilde{U}_b\right| \le \iiint\limits_{B_\varepsilon} \left|\frac{1}{r} - \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{r^2}{2\varepsilon^3}\right| d\xi\, d\eta\, d\zeta \le$$

$$\le \max|\mu| \cdot \iiint\limits_{B_\varepsilon} \left|\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{r^2}{2\varepsilon^3}\right) \cdot r^2 \sin\theta\right| d\xi\, d\eta\, d\theta \le$$

$$\leq \max|\mu|\cdot 2\pi\cdot 2\int\limits_0^{\varepsilon}\left|r-\frac{3r^2}{2\varepsilon}+\frac{r^4}{2\varepsilon^3}\right|dr \leq \max|\mu|\cdot 4\pi\cdot\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{2\varepsilon}+\frac{r^5}{10\varepsilon^3}\right)\Bigg|_0^{\varepsilon} \leq$$

$$\leq \max\mu\cdot\frac{44\pi}{10}\varepsilon^2$$

(здесь использовался факт, что $\iiint\limits_{B_\varepsilon}$ можно заменить на $\int\limits_0^{\varepsilon}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}$).

Далее, найдем частную производную по x, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{U}_b(x,y,z)=\iiint\limits_{\Omega}\mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial b_\varepsilon(r)}{\partial x}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Обозначим теперь функцию

$$U_1(x,y,z)=\iiint\limits_{\Omega}\mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

и рассмотрим разность

$$U_1-\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{U}_b=\iiint\limits_{B_\varepsilon}\mu(\xi,\eta,\zeta)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}-\frac{\partial b_\varepsilon(r)}{\partial x}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta=U^*.$$

Нам нужно получить для U^* аналогичную оценку. Так как

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=\left(\sqrt{\dots}\right)'_x=\frac{-x+\xi}{r^3},$$

то

$$|U^*|=\left|\iiint\limits_{B_\varepsilon}\mu(\xi,\eta,\zeta)\left(2\beta r\cdot\frac{(x-\xi)}{r}-\frac{(x-\xi)}{r^3}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta\right|\leq\ldots\leq C,$$

где $C=\mathrm{const}$, которая не зависит от выбора точки, следовательно,

$$|U^*|\underset{\varepsilon\to 0}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}}0,$$

следовательно, функция U непрерывно дифференцируема.

Теорема доказана.

Теорема 3.10.2. *Если плотность μ дифференцируема, то объемный потенциал дважды непрерывно дифференцируем и $\Delta U=4\pi\mu$.*

Доказательство. Первая производная имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\iiint\limits_{\Omega}\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{r}\right)dV.$$

Докажем теперь, что $\frac{\partial U}{\partial x}$ можно продифференцировать еще раз. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r},$$

то

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\mu\cdot\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\frac{1}{r}+\mu\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r}\right).$$

Рассмотрим теперь шарик радиуса ε и функцию $b_\varepsilon(r)$ (она была определена выше), тогда (по теореме Остроградского-Гаусса)

$$\left(\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial x}\right)_b=\iiint\limits_{\Omega}\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}b_\varepsilon(r)\right)dV.$$

Производная функции U выражается как

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\iiint\limits_{\Omega\setminus B_r}+\iiint\limits_{B_r}.$$

Таким образом,

$$U_1=\frac{\partial U}{\partial x}=\iiint\limits_{\Omega}\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right)dV=-\iiint\limits_{\Omega}\mu\cdot\frac{(x-\xi)}{r^3}\,dV.$$

Проверим непрерывность в точке (x,y,z). Перепишем

$$b_\varepsilon(r)=\begin{cases}\frac{1}{r^3}, & r=\varepsilon\\ \alpha+\beta r^2, & r<\varepsilon\end{cases},$$

тогда

$$\widetilde{U}_1=-\iiint\limits_{\Omega}\mu(x-\xi)b_\varepsilon(r)\,dV.$$

Получим теперь значения α и β:

$$\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon^3}=\alpha+\beta\varepsilon^2\\ -\frac{3}{\varepsilon^5}=2\beta\varepsilon,\end{cases}$$

отсюда $\alpha=\frac{5}{2\varepsilon^3}$, $\beta=-\frac{3}{2\varepsilon^5}$ и оценим разность

$$|U_1-\widetilde{U}_1|\le\iiint\limits_{B_r}\left|\mu(x-\xi)\cdot\left(\frac{1}{r^3}-\frac{5}{2\varepsilon^3}+\frac{3}{2\varepsilon^5}\cdot r^2\right)\right|d\xi\,d\eta\,d\zeta\le\max|\mu|\cdot\text{оценка}\not\to 0$$

(это очевидно). В результате мы получили, что

$$U_1=\frac{\partial U}{\partial x}=\iiint\limits_{\Omega}\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right)dV=-\iiint\limits_{\Omega}\mu\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r}\right)dV.$$

Сосчитаем интеграл:

$$\iiint\limits_{\Omega}\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right)dV=-\iiint\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x,y,z)}\mu\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r}\right)dV-\iiint\limits_{B_\varepsilon}\mu\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r}\right)dV.$$

Интеграл

$$\iiint\limits_{B_\varepsilon}\mu\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r}\right)dV=\iiint\limits_{B_\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\mu\cdot\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\frac{1}{r}\right)dV.$$

Один из получившихся интегралов

$$\iiint\limits_{B_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\mu \cdot \frac{1}{r}\right) dV = \int\limits_{S} \mu \cdot \frac{1}{r} \cos(\vec{\eta}; \vec{i})\, dS,$$

где $\vec{i}$ — орт Ox (дифференцировать можно, так как нет особенностей на сфере). Второй интеграл

$$\iiint\limits_{B_\varepsilon} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{r}\, dV = \iiint\limits_{B_\varepsilon} \mu^* \cdot \frac{1}{r}\, dV$$

(это объемный потенциал, так что его также можно дифференцировать). Таким образом, мы доказали, что производную $\frac{\partial U}{\partial x}$ (а также $\frac{\partial U}{\partial y}$ и $\frac{\partial U}{\partial z}$) можно дифференцировать второй раз.

Найдем лапласиан U:

$$\delta U = \iiint\limits_{\Omega \backslash B_\varepsilon} \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right) \cdot \frac{1}{r}\, dV + \iiint\limits_{B_\varepsilon} \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi}(x-\xi) + \frac{\partial \mu}{\partial \eta}(y-\eta) + \frac{\partial \mu}{\partial \zeta}(z-\zeta)\right) dV +$$

$$+ \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\mu}{r^2} \left(\cos(\vec{\eta}; \vec{i}) \frac{(x-\xi)}{r} + \cos(\vec{\eta}; \vec{j}) \frac{(y-\eta)}{r} + \cos(\vec{\eta}; \vec{k}) \frac{(z-\zeta)}{r}\right) dS$$

(так как $\cos(\vec{\eta}; \vec{i}) = \cos(\vec{\eta}; \vec{j}) = \cos(\vec{\eta}; \vec{k}) = r$). Проведем оценки полученной суммы интегралов.

$$\max \frac{d\mu}{d\xi} \iiint\limits_{B_\varepsilon} \frac{1}{r^3}(x-\xi)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \max \frac{d\mu}{d\xi} \iiint\limits_{B_\varepsilon} \frac{x \sin\varphi \cos\theta}{r^3} r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = C \cdot \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Проводя аналогичные оценки с остальными двумя частями второго интеграла, получим, что он стремится к нулю. Далее,

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\mu}{r^2} \left(\cos^2(\vec{\eta}; \vec{i}) + \cos^2(\vec{\eta}; \vec{j}) + \cos^2(\vec{\eta}; \vec{k})\right) dS = \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\mu}{\varepsilon^2} |\vec{\eta}|^2\, dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{S_\varepsilon} \mu\, dS = \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \mu(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$$

(мы использовали, что $|\vec{\eta}|^2 = 1$, и что по теореме о среднем существует точка $(\xi^*, \eta^*, \zeta^*) \in S$). Принимая во внимание, что первый интеграл равен $\delta \frac{1}{r} = 0$, при $\varepsilon \to 0$ получим, что $\delta U = 4\pi\mu(x, y, z)$.

3.10.2. Потенциалы простого и двойного слоев

В этом разделе мы рассмотрим потенциал простого слоя

$$V(x, y, z) = \iint\limits_{S} \frac{\nu(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, dS$$

и потенциал двойного слоя

$$W(x, y, z) = \iint\limits_{S} \omega(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \eta_p} \frac{1}{r}\, dS_P$$

(координаты точки $P = (\xi, \eta, \zeta)$, точки $M = (x, y, z)$, исходная поверхность S).

Потенциал двойного слоя

Рассмотрим сначала случай $\omega(\xi,\eta,\zeta) = \mathrm{const} = \omega_0$, тогда

$$\omega_0 \iint\limits_{\partial S} \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{r}\right) dS \; -$$

телесный угол, под которым видна поверхность S из точки M. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{r}\, dS_p = \frac{1}{r^2}\cos(\vec{n};\vec{r})\, dS_P \; -$$

телесный угол, под которым виден участок поверхности ∂S_P, содержащий точку P, из точки M (здесь $\vec{n}$ — нормаль из точки P к поверхности S). Ясно, что

$$\omega_0 \iint\limits_{\partial S} \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{r}\right) dS = \begin{cases} 4\pi\omega_0, & M \text{ внутри замкнутой } S \\ 2\pi\omega_0, & M \in S \\ 0, & M \text{ вне } S. \end{cases}$$

Пусть ω — непрерывная на S функция. Найдем скачок потенциала на поверхности. Для этого определим $S_\varepsilon = \{P : P \in S; |M_0 \cdot P| \le \varepsilon\}$ и рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{S} \omega(\xi,\eta,\zeta)\left(\frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{r}\right) dS_P = \iint\limits_{S\setminus S_\varepsilon(P)} \omega(\xi,\eta,\zeta)\left(\frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{r}\right) dS_P + \iint\limits_{S_\varepsilon} \omega(P)\frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{r}\, dS_P.$$

Так как первый интеграл непрерывен во всем пространстве, то при $\varepsilon \to 0$ он стремится к несобственному интегралу $W(M_0) = \iint\limits_S \omega(P)\frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{|M_0\cdot P|}\, dS$, где $M_0 \in S$. Следовательно,

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \omega(\xi,\eta,\zeta)\left(\frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{r}\right) dS_P = \iint\limits_{S_\varepsilon} (\omega(P) - \omega(M_0))\frac{\partial}{\eta_P}\frac{1}{r}\, dS + \iint\limits_{S_\varepsilon} \omega(M_0)\frac{\partial}{\eta_P}\frac{1}{r}\, dS.$$

Таким образом, скачок потенциала

$$|\omega(P) - \omega(M_0)| < C|P\cdot M_0| \le C\varepsilon.$$

Теперь можно выразить потенциал

$$W(M) = \iint\limits_{S\setminus S_\varepsilon} (\omega(P) - \omega(M_0))\frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{r}\, dS_P + \iint\limits_{S_\varepsilon} (\omega(P) - \omega(M_0))\frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{r}\, dS_P + \omega(M_0)\iint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{r}\, dS_P.$$

При $\varepsilon \to 0$

$$\iint\limits_{S\setminus S_\varepsilon} \longrightarrow \iint\limits_{S} (\omega(P) - \omega(M_0))\frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{|M_0\cdot P|}\, dS,$$

следовательно,

$$W(M) \underset{M\to M_0}{\longrightarrow} \iint\limits_{S} \emptyset(P)\frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{|M_0\cdot P|}\, dS - 2\pi\omega(M_0) + (4\pi\omega(M_0) - 4\pi\omega(M_0)).$$

Учитывая, что $M \to M_0$ снаружи, и что интеграл равен $\omega(M_0)$, запишем значения потенциала двойного слоя

$$\lim_{M\to M_0} W(M) = \begin{cases} W(M_0) - 2\pi\omega(M_0), & M \text{ снаружи} \\ W(M_0), & M \in S \\ W(M_0) + 2\pi\omega(M_0), & M \text{ внутри.} \end{cases}$$

Потенциал простого слоя

$$V(x,y,z)=\iint\limits_S \frac{\nu(\xi,\eta,\zeta)}{r_{MP}}\,dS.$$

Теорема 3.10.3. *Если функция $\nu(P)$ непрерывна, то потенциал $V(M)$ непрерывен.*

Доказательство. Обозначим $S_\varepsilon = S\cap B_\varepsilon(M)$. Сомнения вызывает только интеграл $\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\nu(P)}{r_{MP}}\,dS_P$ (так как в точках $r_{MP}>\varepsilon$ все хорошо). Интеграл по оставшейся части поверхности дает в пределе несобственный сходящийся интеграл.

$$\left|\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\nu(P)}{r_{MP}}\,dS_P\right|\le \max_{S_\varepsilon}\nu(M)\left|\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{dS_P}{r_{MP}}\right|\le \max\nu(M)\sqrt{2}\left|\iint\limits_{\delta_{2\varepsilon}(M^{P_0})}\frac{d\delta_P}{r_{MP}}\right|=4\pi\sqrt{2}\max\nu(M)\cdot\delta\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow}0$$

(здесь $r_{M^{P_0}P}$ — проекция на касательную в точке P_0 к плоскости так, что $r_{MP}=r_{M^{P_0}P}=r$). Связь элементов площади:

$$dS_P=\frac{d\delta}{\cos(\vec{\eta}_S;\vec{\eta}_\delta)},$$

при достаточно малом δ угол $(\vec{\eta}_S;\vec{\eta}_\delta)<45^0$.

Теорема доказана.

Рассмотрим скачок на поверхности нормальной производной потенциала простого слоя. Чтобы определить нормальную производную, введем в окрестности точки $P_0\in S$ локальную систему координат с осью Oz, направленной по внутренней нормали к S. Определим $\frac{\partial V}{\partial\eta}=\frac{\partial V}{\partial z}$. Нас интересует производная $\frac{\partial V}{\partial z}$ при $M_0\to P$. Производная

$$\frac{\partial V}{\partial\eta_{P_0}}=\frac{\partial V}{\partial z}=\iint\limits_S\nu(P)\left(\frac{\partial}{\partial\eta_M}\frac{1}{r_{MP}}\right)dS.$$

Это выражение не является потенциалом двойного слоя, ибо здесь производная берется по нормали в точке M, а не P. В потенциале двойного слоя было, что

$$\frac{\partial}{\partial\eta_P}\frac{1}{r_{MP}}=\frac{\cos\varphi}{r^2_{MP}},$$

а здесь

$$\frac{\partial}{\partial\eta_M}\frac{1}{r_{MP}}=\frac{\cos(\pi-\psi)}{r^2_{MP}}=-\frac{\cos(\psi)}{r^2_{MP}}.$$

Установим связь между φ и ψ. Для этого запишем векторы в сферической системе координат с начальным положением в точке P и ортом z, направленным по $\vec{\eta}_P$. Тогда

$$\vec{MP}=(\sin\varphi\cos\Phi_1,\sin\varphi\sin\Phi_1,\cos\varphi),$$

$$\vec{\eta}_M=(\sin\gamma\cos\Phi_2,\sin\gamma\sin\Phi_2,\cos\gamma).$$

Обозначим $\Phi_1-\Phi_2=\Phi$, тогда $\cos(\pi-\psi)=-\cos\psi=(\vec{MP};\vec{\eta}_M)=\sin\varphi\sin\gamma(\cos\Phi_1\cos\Phi_2+\sin\Phi_1\sin\Phi_2)+\cos\varphi\cos\gamma=\sin\varphi\sin\gamma\cos\Phi+\cos\varphi\cos\gamma$. Таким образом, интеграл

$$\iint\limits_S\frac{\cos\psi}{R^2}\nu(P)\,dS=-\iint\limits_S(\nu(P)\cos\gamma)\frac{\cos\varphi}{R^2}\,dS-\iint\limits_S\sin\gamma\cos\Phi\nu(P)\frac{\sin\varphi}{R^2}\,dS.$$

Так как $\cos\gamma \to 1$ при $P \to P_0$, то $-\iint\limits_S (\nu(P)\cos\gamma)\frac{\cos\varphi}{R^2}\,dS$ имеет скачок $-\nu(P_0)\cdot 2\pi$ (изнутри). Интеграл $-\iint\limits_S \sin\gamma\cos\Phi\nu(P)\frac{\sin\varphi}{R^2}\,dS$ скачка не имеет, так как $\sin\varphi \approx R$ при $P \to P_0$, следовательно, особенность только типа $\frac{1}{R}$, как у потенциала простого слоя.

В результате мы получаем, что

$$\lim_{\substack{M \to P_0 \\ \text{изнутри}}} \frac{\partial V}{\partial\eta_{\text{внутр.}}} = \frac{\partial V}{\partial\eta}(P_0) - 2\pi\nu(P_0).$$

Аналогично,

$$\lim_{\substack{M \to P_0 \\ \text{снаружи}}} \frac{\partial V}{\partial\eta_{\text{внутр.}}} = \frac{\partial V}{\partial\eta}(P_0) + 2\pi\nu(P_0).$$

Скачок:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\eta_{\text{внутр.}}}\right|_{\text{внутр.}} - \left.\frac{\partial V}{\partial\eta_{\text{внутр.}}}\right|_{\text{наружн.}} = -4\pi\nu(P_0).$$

3.10.3. Применение потенциалов для решения краевых задач

Мы рассматриваем уравнение Лапласа $\Delta U = 0$ в замкнутой ограниченной области Ω с гладкой границей. Для него можно поставить две задачи:

— Дирихле: $U|_{\partial\Omega} = f$;

— Неймана: $\left.\frac{\partial U}{\partial\eta_{\text{внутр.}}}\right|_{\partial\Omega} = f$.

Внутренняя задача Дирихле

Будем искать решение в виде потенциала двойного слоя:

$$U(M) = \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos\varphi}{r_{MP}^2}\omega(P)\,dS.$$

1) Внутри области оно удовлетворяет уравнению Лапласа.

2) Удовлетворяет граничным условиям:

$$2\pi\omega(P_0) + \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos\varphi}{r_{P_0P}^2}\omega(P)\,dS = f(P_0) \qquad (*)$$

(получилось интегральное уравнение для $\omega(P)$).

Внешняя задача Неймана

Решение представляется в виде потенциала простого слоя, для $\nu(P)$ получается то же самое уравнение:

$$2\pi\nu(P_0) + \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos\psi}{r_{P_0P}^2}\nu(P)\,dS = f(P_0).$$

Интегральные операторы этих двух уравнений являются сопряженными друг другу.

Докажем, что уравнение (*) имеет решение (будем считать, что область Ω выпукла). Для этого рассмотрим сначала однородное уравнение. По теореме Фредгольма достаточно доказать, что имеется только тривиальное решение. Учитывая, что $2\pi = \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2}\, dS$, запишем однородное уравнение в виде

$$\iint\limits_{\partial S} \frac{\cos\varphi}{r_{P_0P}^2}(\omega(P_0) + \omega(P))\, dS = 0$$

($\cos\varphi > 0$, если область выпуклая). Тогда, если взять $P_0 \leftrightarrow \max|\omega(P)| = \omega(P_0)$, то слагаемое $\omega(P_0) + \omega(P)$ сохраняет знак, т.е. мы имеем интегрируемую знакопостоянную функцию, тогда $\omega(P_0)+\omega(P) = 0$, иначе говоря, $\omega(P_0) = -\omega(P)$, т.е. $\omega(P_0) = 0$ и (так как $\max|\omega(P)| = 0$) $\omega(P) \equiv 0$. Таким образом, однородное уравнение имеет только тривиальное решение, следовательно, неоднородное уравнение имеет решение для любой правой части.

Для внешней задачи Дирихле имеем интегральное уравнение

$$-2\pi\omega(P_0) + \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos\varphi}{r_{P_0P}^2}\omega(P)\, dS = f(P_0),$$

а для внешней задачи Неймана

$$-2\pi\nu(P_0) + \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos\psi}{r_{P_0P}^2}\nu(P)\, dS = f(P_0).$$

Тогда, проводя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, получаем, $\omega(P_0) - \omega(P) = 0$, следовательно, $\omega(P) \equiv \mathrm{const}$.

Таким образом, внутренняя задача Неймана разрешима в случае, если функция $f(P_0)$ ортогональна нетривиальному решению однородной сопряженной задачи. Т.е. мы получили условие разрешимости: $\iint\limits_{\partial\Omega} f\, dS = 0$ (записывая скалярное произведение в виде $(\varphi, \mathrm{const}) = \iint\limits_{\partial\Omega} f \cdot \mathrm{const}\, dS$).

Легко видеть, что условие разрешимости внешней задачи Дирихле также есть некоторое условие ортогональности.

Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа

1. Вспомним формулу Грина

$$U(M) = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{4\pi r_{MP}} \frac{\partial U}{\partial\eta} - U \frac{\partial}{\partial\eta} \frac{1}{4\pi r_{MP}} \right) dS_P - \iiint\limits_{\Omega} \frac{\Delta U}{4\pi r_{MP}}\, d\Omega. \tag{1}$$

Если U — гармоническая в области Ω, то последнее слагаемое равно 0.

2. Для гармонических U и V

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial\eta} V - U \frac{\partial V}{\partial\eta} \right) dS_P = 0. \tag{2}$$

Тогда

$$U(M) = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial\eta} \left(\frac{1}{4\pi r} + V \right) - U \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{1}{4\pi r} + V \right) \right) dS_P \tag{3}$$

получается сложением уравнений (1) и (2).

Выберем функцию V гармонической и такой, что

$$\left(\frac{1}{4\pi r_{MP}} + V(P) \right) \bigg|_{\partial\Omega} = 0.$$

Определение 27. Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω называется такая функция $G(M,P)$, для которой:

1) $\Delta G = 0$ при $M \neq P$;
2) $G(M,P)|_{\partial\Omega} = 0$;
3) она представима в виде
$$G(M,P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + V(P),$$
где V — гармоническая функция без особенностей.

Если функция Грина известна, то решение неоднородной задачи Дирихле получается в виде
$$U(M) = -\iint\limits_{\partial\Omega} f\frac{\partial G}{\partial\eta}\,dS$$
(поле, созданное точечным источником находящимся внутри области).

Осталась последняя проблема: найти функцию Грина, т.е. решить задачу
$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ V|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi r_{MP}} \end{cases}.$$
Это тоже сложная краевая задача, однако краевое условие здесь уже не является произвольным. И в ряде случаев это имеет решающее значение.

Упражнение 4. Доказать: $G(M,P) = G(P,M)$.

3.11. Уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + CU = 0, \ \ C = \text{const}.$$
Отметим кратко моменты, отличающие это уравнение от случая уравнения Лапласа. Посмотрим, есть ли здесь теорема единственности. Для $C < 0$ теорема единственности имеет место быть.

Теорема 3.11.1 (принцип максимума). *Пусть U удовлетворяет уравнению Гельмгольца с $C < 0$ в ограниченной области Ω с границей $\partial\Omega$. Тогда функция не может достигать положительных максимальных и отрицательных минимальных значений во внутренней области.*

Доказательство. Пусть существует M_0 такое, что $U(M_0) = max\,U(M)$, $M \notin \partial\Omega$. Тогда
$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{M_0} \leq 0; \ \ \left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{M_0} \leq 0; \ \ ...$$
$$\begin{cases} \Delta U \leq 0 \\ \Delta U = -CU \end{cases}.$$
Мы получили противоречие, то есть максимума внутри быть не может.

Теорема доказана.

Теорема 3.11.2 (единственности). *Следует из принципа максимума по схеме, которая была раньше для уравнения Лапласа.*

Потенциалы для уравнения Гельмгольца строятся также, как для уравнения Лапласа с заменой $\frac{1}{r}$ на $\frac{e^{-\sqrt{-c}r}}{r}$. Вся теория потенциала сохраняется. Скачки имеют те же самые значения.

Функция Грина $G(M,P)$:

1) $\Delta G + CG = 0$;

2) $G(M,P)\Big|_{\partial\Omega} = 0$;

3) $G(M,P) = \frac{e^{-\sqrt{-c}r}}{4\pi r_{MP}} + V$, где $\Delta V + CV = 0$.

Формулы Грина имеют тот же вид, что и раньше. Уравнение Гельмгольца связано с волновым уравнением: если $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\Delta V$ и ищем решение в виде $V = e^{iwt}U$, то получаем $-\omega^2 U = a^2\Delta U$, то есть $\Delta U + \frac{\omega^2}{a^3}U = 0$.

Рассмотрим уравнение $\Delta U + CU = f$, где f с компактным носителем (то есть отлично от 0 в ограниченной области). При $C > 0$ единственности нет.

Рассмотрим уравнение $\Delta U + k^2 U = 0$ и найдем сферически симметричное решение с особенностью в точке 0.

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)\right) + k^2 U = 0$$

Положим $U(r) = \frac{V(r)}{r}$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{r\frac{dV}{dr} - 1\cdot V}{r^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dV}{dr} - V\right).$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr} - V\right) + k^2\frac{V}{r} = 0.$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}V + k^2 V = 0.$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dV}{dr} + r\frac{d^2V}{dr^2} - \frac{dV}{dr}\right) + k^2\frac{V}{r} = 0.$$

Итого получаем уравнение $V'' + k^2 V = 0$, откуда находим $V = A\sin kr + B\cos kr$.

$$U_1(r) = \frac{e^{ikr}}{r},\ \ U_2(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

"Отфильтровать" одно решение с помощью введения убывания на ∞ (как в случае $k^2 < 0$) не удается (они обе убывают и отличаются лишь фазовым множителем). Существует несколько способов решить эту проблему, но мы упомянем лишь один — условие излучения Зоммерфельда.

При введении в рассмотрение временного множителя одно из решений получается расходящейся сферической волной, а другое - сходящейся. Исходя из этого и строится условие, позволяющее различить эти решения. Итак, потребуем, чтобы решение V удовлетворяло при $r \to \infty$ условиям:

$$\begin{cases} U = \underline{O}(\frac{1}{r}) \\ \frac{\partial U}{\partial r} + ikU = \overline{o}(\frac{1}{r}) \end{cases}$$

Покажем, что их выполнение обеспечивает единственность решения.

Доказательство.

Рассмотрим U_1, U_2 - решения неоднородной задачи. Тогда $U = U_1 - U_2$ - решение однородной задачи. Запишем формулу Грина для внутренности сферы S_R радиуса R:

$$|U(M)| = \left|\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - U\frac{\partial\frac{e^{-ikr}}{r}}{\partial r}\right)ds\right| = \left|\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_R}\left(\frac{e^{-ikr}}{R}\frac{\partial U}{\partial r}\bigg|_R + U\frac{ike^{-ikR}}{R} + U\frac{e^{-ikR}}{R^2}\right)ds\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_R}\left(\frac{1}{R}\overline{o}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R^2}\underline{O}\left(\frac{1}{R}\right)\right)R^2\sin\varphi\, d\varphi d\theta\right| = \left|\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_R}\left(\overline{o}(1) + \underline{O}\left(\frac{1}{R}\right)\right)\sin\varphi\, d\varphi d\theta\right| = \overline{o}(1).$$

Итого мы получили, что $|U(M)| \to 0$ при $R \to \infty$, а так как $U(M)$ не зависит от R, то $U(M) \equiv 0$. Таким образом $U_1 - U_2 \equiv 0$, то есть получили единственность решений.

Теорема доказана.

Литература

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.

[2] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.

[3] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. — М.: Мир, т.1-1982, т.2-1984.

[4] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.

[5] Хетсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983.

[6] Булдырев В.С., Павлов В.С. Линейная алгебра и функции многих переменных. — Л.: изд-во ЛГУ, 1985.

[7] Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. — М.: Атомиздат, 1972.

[8] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. — М.: Мир, т.1-1962, 342с., т.2-1963, 515с.

[9] Петрас С.В., Петрашень А.Г. Математическая физика. Учебное пособие. — Л.: изд-во ЛИТМО, 1983, 71с.

[10] Смирнов В.И. Курс высшей математики. — М.: Наука, т.3,ч.1-1974, 323с., т.3,ч.2-1974, 672с., т.4,ч.1-1974, 336с., т.4,ч.2-1981, 550с.

[11] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1978, 319с.

[12] Бабич В.М., Григорьева Н.С. Ортогональные разложения и метод Фурье. — Л.: изд-во ЛГУ, 1983, 240с.

[13] Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1948, 120с.

[14] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972, 456с.

[15] Краснов М.Л., Киселев А.Н., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968, 192с.

[16] Бирман М.Ш., Соломяк М.Э. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — Л.: изд-во ЛГУ, 1980, 264с.

[17] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.

[18] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1980.