ЗАДАЧА 1.

Внутри трубы радиуса R перпендикулярно ее оси катается без проскальзывания тонкий обруч радиуса r. При максималном удалении шарика от положения равновесия $\sin\varphi$ можно считать равным φ, где φ - угол между радиусом, проведенным из центра трубы к центру обруча, и вертикалью (аналогичное приближние делается при рассмотрении колебаний математического маятника). Найти, пренебрегая силой трения качения, период колебателного движения обруча при $R >> r$.

РЕШЕНИЕ.

Напишем закон сохранения полной энергии для обруча:

$$mV_c^2+mV_r=2mgR(1-\cos\varphi) \quad (1),$$

где V_c- скорость поступательнного движения центра обруча, V_r- скорость вращения обруча вокруг его центра, остальные обозначения понятны без пояснения.

При отсутствии проскальзвания:

$$R\,\varphi=r\alpha \quad (2),$$

где α- угол поворота обруча вкруг его центра.

Выразим скрорости через прииводную по времени от угла отклонения φ:

$$V_c=R(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t) \text{ и } V_r=R(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t) \quad (3).$$

При написаниии (3) было использовано соотношение (2). Подставив (3) в (1), и преобразовав выражение в скобках в правой части (1), с учетом малости угла отклонения, а также сократив намассу обруча, получим:

$$2R^2(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)^2=gR\varphi^2.$$

Из последнего уравнения находим частоту колебаний:

$$\omega=(g/2r)^{1/2},$$

которая оказывается в корень квадратный из двух меньше частоты колебаний математического маятнника.

ЗАДАЧА 2.

В сосуде находится разреженный идальный газ. Половина молекул имеет энергию ε_1, а половина энергию ε_2. Полное число частиц равно N. В сосуде образовалось маленькое отверстие площадью ΔS, и началось молекулярно истечение газа. При таком истечении не образутся газодинамического потока (не образуется струи), по всему сосуду давление одинаково, молекулы летящие к отверстию вылетают через него, остальные молекулы не «чувствуют» его. Считая, что частицы в сосуде не обмениваются энергией между собой и со стенками сосуда, найти среднюю энергию отавшихся молеул в сосуде:

$$\langle E\rangle=(N_1\varepsilon_1+N_2\varepsilon_2)/(N_1+N_2),$$

когда в нем число молекул с энергией ε_1 уменьшится вдвое.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим N_1 число мопекул с энергией ε_1 в произвольный момент времени. За бесконечно малое врмя d t убыль этих молекул dN будет равна:

$$-\mathrm{d}N_1=(N_1 v_1\Delta S\,\mathrm{d}t)/(6V) \text{ ипи } -\mathrm{d}N_1/N_1=(v_1\Delta S\,\mathrm{d}t)/(6V).$$

Интегрируя находим с точностью до постоянной:

$$N_1=C\exp[-(v_1\Delta S\,t)/(6V)].$$

Так как при $t=0$ N_1 по условию равно половине от общего числа частиц, то $C=N/2$. Поэтому из следующего выражения можно найти конечное время:

$$N/4=(N/2)\exp[-(v_1\Delta S\,\tau)/(6V)].$$

Оно равно

$$\tau=(6V\ln 2)/(v_1\Delta S).$$

Теперь можно найти сколько останется частиц с энергией ε_2:

$$N_2=(N/2)\exp[-(v_2\Delta S\tau)/(6V)]=(N/2)\exp[-(v_2\ln 2)/v_1].$$

Находим среднюю энергию в конечный момент времени:

$$<E>=[N\varepsilon_1+2N\varepsilon_2\exp(-(v_2/v_1)\ln 2)]/[N+2N\exp(-(v_2/v_1)\ln 2)].$$

Окончательно:

$$<E>=[\varepsilon_1+2\varepsilon_2\exp(-(v_2/v_1)\ln 2)]/[1+2\exp(-(v_2/v_1)\ln 2)].$$

ЗАДАЧА 3.

В сосуде объемом V находится двух компонентный идальный газ, состоящий из атомов гелия и аргона. Для простоты вычислений будем считать что все атмы имеют одинаковую энергию ε. Полное число частиц равно N_0. В сосуде образовалось маленькое отверстие площадью ΔS, и началось молекулярное истечение газа. При таком истечении не образутся газодинамического потока (не образуется струи), по всему сосуду давление одинаково, молекулы летящие к отверстию вылетают через него, остальные молекулы не «чувствуют» его. Найти энергию газа (энергию всех оставшихся частиц) через время τ.

РЕШЕНИЕ.

За бесконечно малое врмя d t убыль всех частиц будет равна:

$$-dN=(1/6)(N/2)[(v_1+v_2)\Delta S\, d\, t)]/V \text{ или } -dN/N=(1/12)[(v_1+v_2)\Delta S d\, t)/V].$$

Интегрируя находим с точностью до постоянной (которую удобней записать как –lnC):

$$-\ln N=(1/12)[(v_1+v_2)\Delta S\, t)/(6V)]-\ln C \text{ или } N=C\exp[-(v_1+v_2)\Delta S\, t)/(12V)].$$

Так как при $t=0$ N по условию равно .N_0, то C=N_0. Поэтому из последнего выражения можно число оставшихся части в момент τ:

$$N=N_0\exp[-(v_1+v_2)\Delta S\,\tau)/(12V)].$$

:Энергия оставшегося газа будет равна:

$$E=\varepsilon N_0\exp[-(v_1+v_2)\Delta S\,\tau)/(12V)] \quad (1).$$

Осталось выразить скорости частиц через их энергию и массу

$$v_i=(2\varepsilon/m_i)^{1/2}$$

Массу атомов в свою очередь можно выразить через молярные массы и число Авагадро:

$$m_i=M_i/N_A$$

Подставив эти соотношения в формулу (1), получим искомый ответ задачи:

$$E=e\,N_0\exp[-\frac{\Delta St\sqrt{2e\,N_A}}{12V}(\frac{1}{\sqrt{M_1}}+\frac{1}{\sqrt{M_2}})]$$

ЗАДАЧА 4.

Для решения задачи необходимо познакомиться с основными понятиями фотомерии и опрделениями фотометрических величин. Ламбертовыми повехностями называются поерхности, излучающими свет изотропно Световой поток $d\Phi$, излучаемый бесконечно малой площадкой dS светящегося тела в единмцу времени в бескнечено малый телесный угол $d\Omega$ равен:

$$d\Phi_{исп}=B\cos q\, dSd\Omega \quad (1),$$

где B коэффициент, назывемый яркостью и характеризующий ипускательную способность поверхности тела, угол q отсчитывается от нормали к поверхности к направлению тепесного угла. Освещенностью поверхности E называется отношение падающего светового потока к ее площади. В дифференциальной форме это определение имеет вид:

$$E=\frac{d\Phi_{пад}}{dS} \quad (2).$$

В последней формуле поток, стоящий в числителе, представляет собой суммарный поток со вех направлений.

Напомню необходимые сведения из геометрии. Площадь бесконечной малой площадки в сферической системе координат равна:

$$dS=R^2\sin q\, dq\, dj \quad (3).$$

Если проинтегрировать это выраженние по углам, то получим хорошо известную формулу площади ссферы:

$$S = R^2 \int_0^p \sin q\, dq \int_0^{2p} dj = R^2 g 2 g 2p = 4p R^2 .$$

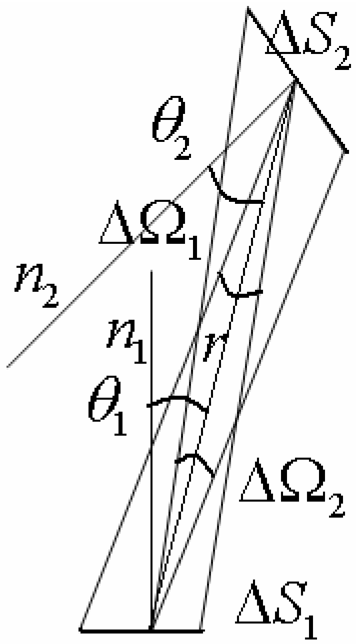
Телесным углом ннazвается:

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = 2p \sin q\, dq \qquad (4) .$$

Условие задачи. Над горизонтальной поверхнностью навысоте $2R$ находится светящийся диск радиуса R. Диск параллелин поверхности. Под диском в месте пересечения оси, проведенной через центр диска и перпендикулярной ему, и горизонтальной поверхностью освещенность равна E. На какой высоте на этой оси вместо диска надо расположить центр свеящейся сферы, чтобы освещенность была такой же? Поверхности обоих источников ламбертовы и одинаковой яркости.

РЕШЕНИЕ.

Решение задачи «в лоб» по приведнным в ведении формулам слишком громоздко. Поэтому выведем очень полезную формулу. Выдепим маленькие пощадки: на источнике света ΔS_2 и на поверхности в месте определения освещенности- ΔS_1 (см. рис.). Расстояние между площадками обозначим r. Углы между нормалями к площадкам и прямой (сединяющей площадки) r обозначим q_1 и q_2 соответственно. Тогда освещенность площадки ΔS_1, создаваемая площадкой ΔS_2 будет равна:



$$\Delta E = \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta S_1} = \frac{B\Delta S_2 \Delta\Omega_1 \cos q_2}{\Delta S_1} = \frac{B\Delta S_2 \cos q_2}{\Delta S_1}\frac{\Delta S_1 \cos q_1}{r^2} .$$

При преобразованиях были использованы формулы (2), (1) и определение телесного угла. Сократив на ΔS_1 и еще раз используя определение телесного угла, получим:

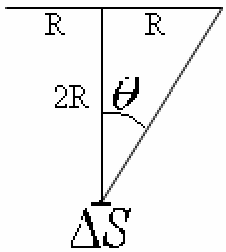
$$\Delta E = B\Delta\Omega_2 \cos q_1 .$$

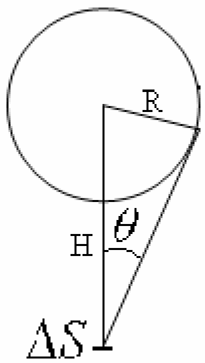
Переходя к дифференциальному виду и используя (4), получим расчетную формулу для решения задачи:

$$dE = 2p B \sin q \cos q\, dq .$$

Следует обратить внимание на то, что $2p$ появилось при интегрировании по второму углу (это можно сдалать, так как тела в задаче имеют осевую симметрию).

Физчески задача решена. Сферу надо расположить на такой высоте, чтобы она была видна под таким же телесным углом, под каким виден диск. Геометрическое решение очевидно из приведенных ниже двух рисунков. Для диска :





$$tgq = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \sin q = \frac{1}{\sqrt{5}} .$$

Для сферы:

$$\sin q = \frac{R}{H} .$$

Приравннивая, находим искомую высоту:

$$H = R\sqrt{5}$$

ЗАДАЧА 5.

На на концах длинной доски длиной L и массой $3m$ лежат две маленьких шайбы массой m и $2m$, которые можно считать точечными телами. Обеим шайбам одновременно сообщили противополжные скорости равные V_0. Между шайбами и доской существует трение, причем коэффициент трения одинаков для обеих шайб. Между доской и горизонтальной поверхностью, на которой она лежит, трения нет. Известно, что шайбы остановились одновременно практическм в одной точке без удара, а так же выше перечисленные величины. Найти коэффициент трения.

РЕШЕНИЕ.

Система трех тел является замкнутой (относительно горизонтального движения). Поэтому скорость центра масс V_c такой системы постоянна и равна ее начальной скорости:

$$V_{cx} = \frac{2mV_0 - mV_0}{3m+2m+m} = \frac{V_0}{6} \quad (1).$$

В конечный момент времени (в момент остановки шайб) доска будет двигаться с скоростью V_{cx}. До этого момента она двигалась равноускоренно:

$$V_3 = kgt. \quad (2).$$

Приравняв (1) и (2) в конечный момент времени, находим время остановки шайб:

$$t = \frac{V_0}{6kg} \quad (3).$$

Если начало координат совместить с концом доски, на котором находится шайба $2m$, а ось x направить по движению доски, то начальная координата центра масс X_{co} будет равна:

$$X_{co} = \frac{3mL + 2mL}{12m} = \frac{5L}{12} \quad (4).$$

Так как центр масс двигался с постоянной скоростью, то конечная его координата равна:

$$X_c = X_{co} + \frac{V_0}{6}\frac{V_0}{6kg} = \frac{5L}{12} + \frac{V_0^2}{36kg} \quad (5).$$

С другой стороны эта координата можетбыть написана в виде:

$$X_c = \frac{kgt^2}{2} + \frac{3mL + 2\cdot 3mx}{12m} = \frac{V_0^2}{72kg} + \frac{3L+6x}{12} \quad (6).$$

Первое слагаемое пермещение края доски, во втором слагаемом x - растояние от края доски до точки расположения остановившихся шайб. Из (5) и (6) находим x:

$$x = \frac{L}{3} - \frac{V_0^2}{36kg} \quad (7).$$

Рассмотрим движение шайбы $2m$. Шайба двигалась равнозамедленно, при чем известен ее путь и время дввижения:

$$x_3 + x = V_0 t - \frac{kgt^2}{2} \quad (8),$$

Где x_3 - перемещение конца доски. Подставив в него все ранее вычисленные значеня, получим:

$$\frac{V_0^2}{72kg} + \frac{L}{3} - \frac{V_0^2}{36kg} = \frac{V_0^2}{36kg} - \frac{V_0^2}{72kg} \quad (9).$$

Из последнего выражения находим коэффициент трения:

$$k = \frac{V_0^2}{12Lg}.$$

ЗАДАЧА 6.

В сосуде объемом V находится идальный газ. Полное число частиц равно N_0 В начальный момент времени распределение частиц по модулю скорости имеет вид:

$$n(v) = av \quad \text{при} \quad 0 \le v \le v_m/2 \qquad (1)$$

$$n(v) = -av + av_m \quad \text{при} \quad v_m/2 \le v \le v_m \qquad (2)$$

$$n(v) = 0 \quad \text{при} \quad \le v \le \infty. \qquad (3)$$

За $n(v)$ обозначено число частиц со скорростью v. Число частиц со скоростями от v до $v+dv$ равно $dn(v)= n(v)dv$.

В сосуде образовалось маленькое отверстие площадью ΔS, и началось молекулярное истечение газа. При таком истечении не образутся газодинамического потока (не образуется струи), по всему сосуду давление одинаково, молекулы летящие к отверстию вылетают через него, остальные молекулы не «чувствуют» его. Найти распределение молекул по соростям черз время τ, если оно все время остается таким же по форме, как и начальное (то есть изменяется только эффициент наклона a).

РЕШЕНИЕ.

Свяжем коэффициент наклона a с полным числом частиц N_0 Число частиц в единице объема со всеми скоростями равно:

$$n_0 = \int_0^\infty n(v)dv = \int_0^{\frac{v_m}{2}} avdv + \int_{\frac{v_m}{2}}^{v_m} (-av + av_m)dv = \frac{av_m^2}{2} \qquad (4),$$

$$N_0 = n_0 V = \frac{av_m^2 V}{2} \qquad (5),$$

Аналогичное выражение можно написать для произвольного момента времени:

$$N = \frac{bv_m^2 V}{2} \quad \text{или} \quad b = \frac{2N}{v_m^2 V} \qquad (6).$$

в котром новы й коффициент наклона b и надо определить.

Таким образом для ркшения задачи необходимо определить число частиц, оставшихся в сосуде в конечный момент времени.

Убыль числа частиц за бескконечно малое время dt равно:

$$-dN = \frac{1}{6}\int_0^\infty vdt\Delta Sn(v)dv = \frac{1}{6}\Delta Sdt[\int_0^{\frac{v_m}{2}} bv^2dv + \int_{\frac{v_m}{2}}^{v_m} (-bv^2 + bv_m v)dv].$$

Проинтегрировав и подставив b из (6), получим:

$$-dN = \frac{1}{12}\Delta Sdtbv_m^3 = \frac{1}{6}\frac{\Delta Sdtv_m}{V}N$$

Из последнего выражения находим число частиц в конечный момент времени:

$$N = N_0 e^{-\frac{v_m \Delta St}{6V}} \qquad (7).$$

При выводе (7) учтено, что в начаяльный момент времени число частиц равно N_0.

Осталось вычислить искомый коэффициент наклона в конечный момент времени:

$$b(t) = \frac{2N_0 e^{-\frac{v_m \Delta St}{6V}}}{v_m^2 V} = ae^{-\frac{v_m \Delta St}{6V}}..$$