

Слободянюк А.И.
«Очень длинные физические задачи»

Часть 2.
Задачи 10 – 18.

Содержание:

Задача 10. «Барометрическая формула и прыгающий шарик»	3
Задача 11. «Проводники и диэлектрики».....	8
Задача 12 «Почти бесконечная цепочка».....	23
Задача 13. «Как гроб Магомета»	32
Задача 14. «Перемишка на рельсах»	37
Задача 15. «Фокусировка»	41
Задача 16.	48
Задача 17.....	56
Задача 18.....	63



Задача 10. «Барометрическая формула и прыгающий шарик»

При постоянной температуре T зависимость давления газа P от высоты h , определяется барометрической формулой

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}},$$

где μ - молярная масса газа, g - ускорение свободного падения, R - газовая постоянная.

Молярную массу воздуха принять равной $\mu = 0,029 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

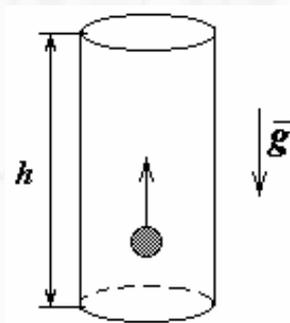
1. Оцените высоту, на которой давление воздуха уменьшается на 1%, если температура воздуха постоянна и равна $t = 0^\circ \text{C}$.

2. В очень высоком вертикальном цилиндрическом закрытом сверху сосуде с площадью основания S находится воздух, масса которого равна m . Найдите зависимость давления газа на дно сосуда от высоты сосуда и от температуры газа.

Рассмотрите два предельных случая а) $\mu g h \gg RT$; б) $\mu g h \ll RT$. Дайте физическое объяснение полученным результатам.

Постройте семейства графиков зависимостей давления газа на дно сосуда от температуры (для нескольких значений высоты сосуда h) и от высоты сосуда (при различных значениях температуры T).

В качестве наглядной модели газа часто рассматривают множество маленьких жестких шариков, хаотически движущихся в некотором сосуде. В дальнейшем рассмотрим поведение упругого шарика движущегося вертикально в закрытом сосуде, находящемся в поле тяжести Земли. Столкновения шарика с дном и верхней крышкой сосуда будем считать абсолютно упругими. Будем изучать среднюю силу давления шарика на дно сосуда, причем будем полагать, что усреднение проводится по промежутку времени, значительно превышающему время между двумя последовательными ударами шарика.



3. Найдите зависимость силы давления шарика на дно сосуда от его высоты h и его скорости v_0 у дна сосуда.

Рассмотрите предельные случаи а) $mgh > \frac{mv_0^2}{2}$; б) $mgh < \frac{mv_0^2}{2}$. Постройте семейства

зависимостей силы давления от высоты сосуда (при постоянной v_0) и от квадрата скорости v_0^2 (при постоянной высоте сосуда h).

4. Рассмотрите «адиабатный» процесс уменьшения высоты сосуда с прыгающим шариком. Пусть крышка сосуда медленно опускается, найдите зависимость силы давления шарика на дно от высоты сосуда. Определите «показатель» адиабаты для этой системы. Дайте объяснение полученному результату.

Решение.

1. Так как изменение давления является малой величиной, то отношение $\frac{\mu gh}{RT} \ll 1$, поэтому барометрическую формулу можно заменить упрощенным выражением

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \approx P_0 \left(1 - \frac{\mu g}{RT} h\right), \quad (1)$$

из которого следует

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P_0 - P}{P_0} = \frac{\mu g}{RT} h,$$

или

$$h = \frac{\Delta P}{P_0} \cdot \frac{RT}{\mu g} \approx 80 \text{ м}. \quad (2)$$

2. Мы знаем зависимость давления от высоты, но в формуле осталось неопределенным давление на дно сосуда P_0 . Для того, что бы получить выражение для давления P_0 , воспользуемся условием равновесия центра тяжести - разность сил давления на нижнюю P_0 и верхнюю P_1 стенки сосуда равна весу всего газа:

$$P_0 - P_1 = \frac{mg}{S}. \quad (3)$$

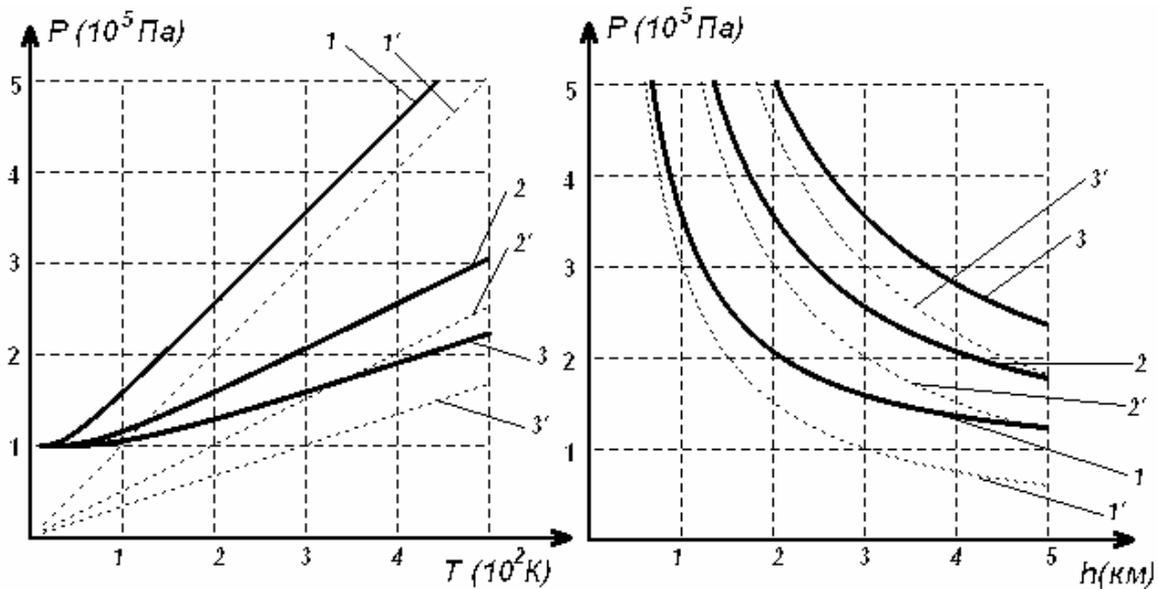
Давление P_1 связано с P_0 барометрической формулой, комбинируя которое с последним выражением, найдем

$$P_0 = \frac{mg}{S \left(1 - e^{-\frac{\mu gh}{RT}}\right)}. \quad (4)$$

При очень больших высотах $\mu gh \gg RT$ можно пренебречь экспонентой и тогда $P_0 = \frac{mg}{S}$. В этом случае давление газа на верхнюю грань сосуда становится пренебрежимо малым, поэтому сила давления на дно сосуда равна весу газа.

В другом крайнем случае $\mu gh \ll RT$ экспоненту можно заменить ее приближенным значением $e^{-x} \approx 1 - x$ и тогда $P_0 = \frac{mRT}{\mu Sh}$, или $P_0 V = \frac{m}{\mu} RT$. В этом приближении можно не учитывать силу тяжести, поэтому параметры газа подчиняются уравнению состояния Менделеева - Клапейрона.

Графики зависимости давления на дно сосуда от его высоты (при постоянной температуре) и от температуры (при постоянной высоте) показаны на рисунке.



Зависимости давления на дно сосуда от температуры (1 - $h=3$ км, 2- $h=6$ км, 3- $h=9$ км); и от высоты сосуда (1- $T=100$ К, 2- $T=200$ К, 3- $T=300$ К), рассчитанные по формуле (4). Пунктирные кривые - те же зависимости, рассчитанные по уравнению Менделеева-Клапейрона.

Наиболее существенная особенность этих зависимостей наблюдается при больших значениях отношения $\frac{\mu gh}{RT}$, потому что в этом случае влияние силы тяжести становится существенным.

3/ Обозначим скорости шарика у дна сосуда v_0 , а у верхней стенки - v_1 . Будем искать среднюю силу давления шарика, усредняя по промежуткам времени значительно большими, чем время между двумя ударами.

Найдем время τ между двумя ударами шарика о дно сосуда. На основании закона сохранения энергии можем записать

$$v_1^2 = v_0^2 - 2gh. \quad (5)$$

Если $v_0^2 < 2gh$, то шарик не долетит до верхней стенки сосуда, тогда время его полета

$$\tau = 2 \frac{v_0}{g}, \quad (6)$$

при $v_0^2 > 2gh$ шарик ударится о верхнюю стенку и время его полета можно рассчитать по формуле

$$\tau = 2 \frac{v_0 - v_1}{g} = 2 \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \quad (7)$$

Если $v_0^2 \gg 2gh$, то последнее выражение можно упростить, используя приближенную формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$:

$$v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh} = v_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}\right) \approx \frac{gh}{v_0}$$

тогда $\tau = 2 \frac{h}{v_0}$, что совпадает с

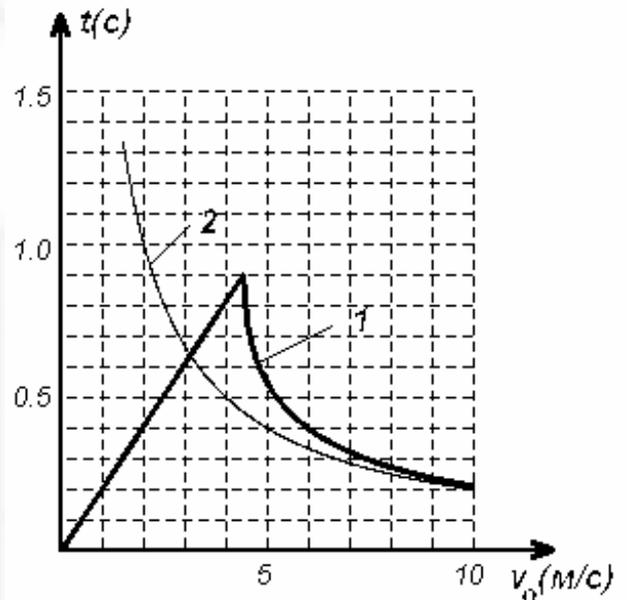
формулой (6). Подумайте почему?

На рисунке 2 изображен график зависимости времени полета шарика от его скорости у дна сосуда. Как видно, действительно зависимость меняется от прямо пропорциональной до обратно пропорциональной.

Теперь запишем силу давления на дно сосуда по стандартной методике $F = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{2mv_0}{\tau}$.

При $v_0^2 < 2gh$, $F = mg$; (8)

при $v_0^2 > 2gh$, $F = \frac{mg}{1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}}$. (9)

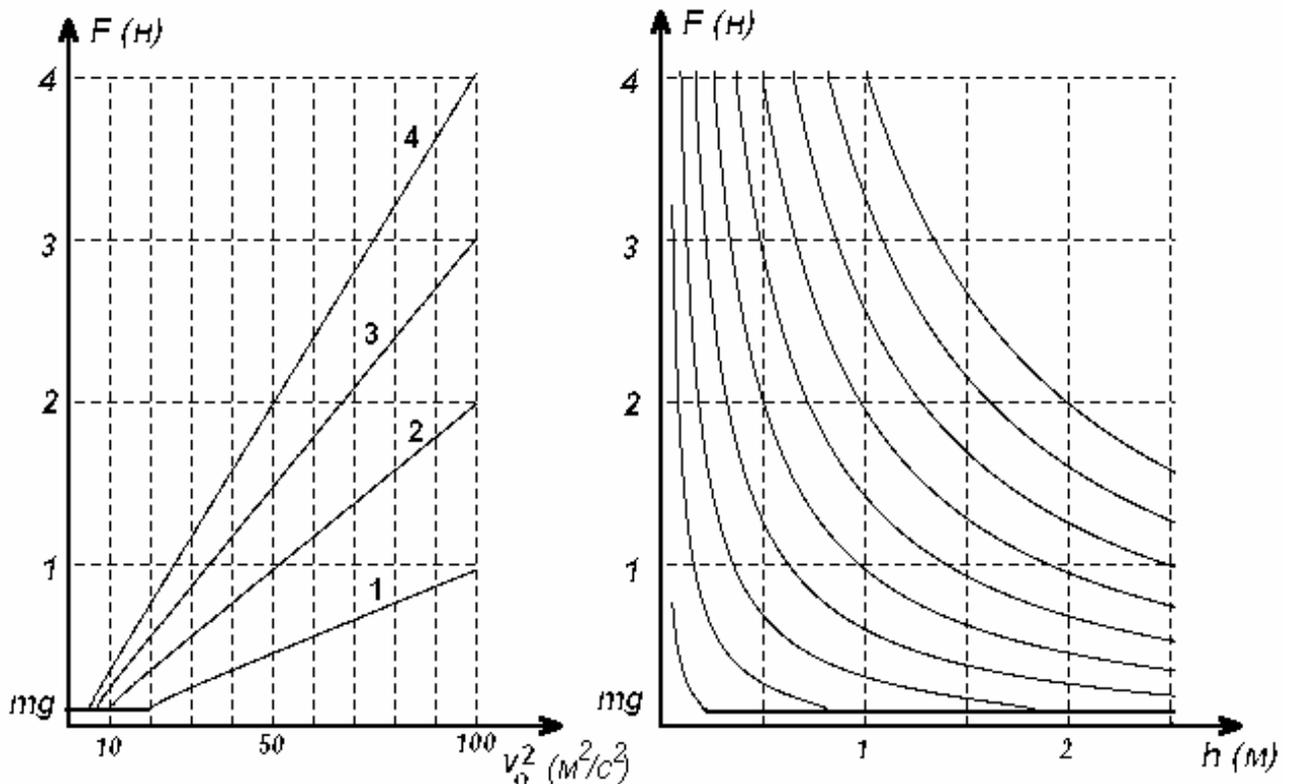


Зависимость времени полета от начальной скорости. 1 - по формуле (10); 2- по приближенной формуле (5). ($h=1.0$ м)

Вот такое «уравнение состояния» получается для «газа» из одного шарика. При $v_0^2 \gg 2gh$ из (9) следует

$$F = \frac{mv_0^2}{h} \quad (10)$$

полный аналог уравнения состояния идеального газа.



Зависимости средней силы давления шарика на дно сосуда от квадрата скорости (1- $h=1.0\text{м}$, 2- $h=0.5\text{м}$, 3- $h=0.33\text{м}$, 4 - $h=0.2\text{м}$); от высоты сосуда (при скоростях, 2, 4, 6...20 м/с). $m=10\text{г}$

На рисунке 3 представлены зависимости силы давления F от h (аналог зависимости давления от объема) и от v_0^2 (аналог температуры).

Итак, мы получили выражение для средней силы давления прыгающего шарика на дно сосуда. Она отличается от веса шарика. Ну а как же объяснить в этом случае утверждение - если центр тяжести системы не изменяет своего положения, то сумма внешних сил, действующих на систему равно нулю? Это положение справедливо и здесь! Не забудьте, шарик ударяется и о верхнюю крышку сосуда, действует на нее с некоторой силой, следовательно, и крышка действует с той же силой на шарик. Эту силу F_1 можно вычислить аналогично:

$$F_1 = \frac{2mv_1}{g}$$

Найдем разность сил, действующих на шарик со стороны дна и со стороны крышки,

$$F_0 - F_1 = \frac{2m(v_0 - v_1)}{\tau},$$

но $\frac{2(v_0 - v_1)}{\tau} = g$ (из простых кинематических рассуждений), поэтому, как и следовало ожидать, $F_0 - F_1 = mg$.

4. Пусть крышка сосуда, медленно двигаясь со скоростью u ($u \ll v$), опустилась на малую высоту Δh за время $\Delta t = \Delta h / u$. При абсолютно упругом встречном ударе шарика о движущуюся крышку его скорость возрастает на

величину $\Delta v = 2u$. Полагая изменение скорости малым, можно приближенно считать, что время между ударами остается постоянным и равным $\tau = 2h / v$, тогда число ударов $n = \Delta t / \tau = v\Delta h / 2hu$. Таким образом, изменение скорости шарика связано с изменением высоты сосуда соотношением

$$\Delta v = n \cdot 2u = -\frac{v\Delta h}{h},$$

или

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta h}{h}. \quad (11)$$

Знак минус указывает, что при уменьшении высоты скорость шарика возрастает. Из уравнения (21) непосредственно следует, что

$$vh = v_0 h_0 = \text{const} \quad (12)$$

Воспользуемся теперь формулой (10), которая здесь полностью применима, так как мы пренебрегаем действием силы тяжести, получим

$$F = \frac{mv^2}{h} = \frac{m(v_0 h_0)^2}{h^3}.$$

Последнее уравнение записывается в виде

$$Fh^3 = \text{const},$$

которое и является уравнением адиабаты, правда, с несколько необычным показателем $\gamma = 3$. Однако, и газ у нас необычный! Идеальный газ, молекулы которого имеют одну степень свободы, согласно общей теории имеет молярную теплоемкость $C_V = R / 2$, тогда по уравнению Майера теплоемкость $C_P = C_V + R = 3 / 2 \cdot R$. Поэтому показатель адиабаты такого газа $\gamma = C_P / C_V = 3$, что полностью соответствует полученному результату.

Задача 11. «Проводники и диэлектрики»

1. Электростатическое поле создается двумя точечными зарядами, находящимися на расстоянии l друг от друга. Величины и знаки зарядов различны и равны q_1 и $-q_2$. Покажите, что поверхность нулевого потенциала этого поля представляет собой сферу, найдите ее радиус.

2. Точечный заряд q расположен на расстоянии l от центра металлической заземленной сферы радиуса R . Найдите:

- суммарный индуцированный заряд сферы;
- силу взаимодействия заряда и сферы.

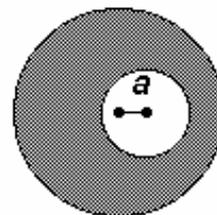
3. Точечный заряд q расположен на расстоянии l от центра металлической изолированной сферы радиуса R . Найдите:

- индуцированный дипольный момент сферы;
- силу взаимодействия заряда и сферы.

4. Точечный заряд q находится на расстоянии h от бесконечной плоской проводящей пластины. Найдите

- распределение поверхностной плотности индуцированных зарядов на пластине;
- силу взаимодействия заряда и пластины;
- энергию взаимодействия заряда и пластины;

5. Внутри равномерно заряженного шара с объемной плотностью заряда ρ вырезана сферическая полость, центр которой находится на расстоянии a от центра шара. Найдите напряженность электрического поля в полости.



6. Металлический шарик радиуса r помещен в однородное электрическое поле напряженности \vec{E} . Найдите:

- распределение поверхностной плотности зарядов на шарике;
- индуцированный дипольный момент шарика.

7. «Газ» состоит из одинаковых металлических шариков радиуса r , концентрация которых равна n . Среднее расстояние между шариками значительно больше их радиусов. Найдите диэлектрическую проницаемость такого «газа».

Указание. Воспользуйтесь соотношением $\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, где \vec{P} - поляризация среды (дипольный момент единицы объема).

Диэлектрическая проницаемость воздуха при нормальных условиях равна $\varepsilon = 1,00058$. Оцените средний размер молекул воздуха.

8. Точечный заряд q находится на расстоянии h от бесконечной плоской границы с бесконечным диэлектриком с проницаемостью ε . Найдите

- распределение поверхностной плотности поляризационных зарядов на пластине;
- силу взаимодействия заряда и пластины.

9. Шар радиуса r , изготовленный из диэлектрика с проницаемостью ε , помещен в однородное электрическое поле напряженности \vec{E} . Найдите:

- распределение поверхностной плотности зарядов на шарике;
- индуцированный дипольный момент шарика.

10. Небольшой шарик радиуса r , изготовленный из диэлектрика с проницаемостью ε , находится на большом расстоянии l ($l \gg r$) от точечного заряда q . Найдите силу, действующую на шарик со стороны заряда.

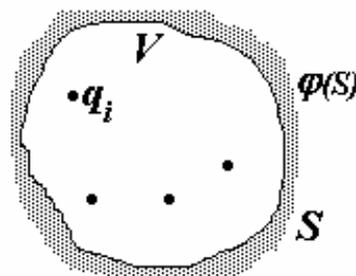
Решение.

Предисловие.

Решение этого комплекта задач сводится к использованию метода изображений. Изложим кратко суть и дадим обоснование этого метода.

Пусть в некоторой области пространства V , ограниченной поверхностью S (в частном случае граница области может простирается до бесконечности), задано распределение зарядов q_i . Электрическое поле в выделенной области определяется однозначно, если

- задано распределение зарядов внутри этой области;
- задано распределение потенциала на границе области.

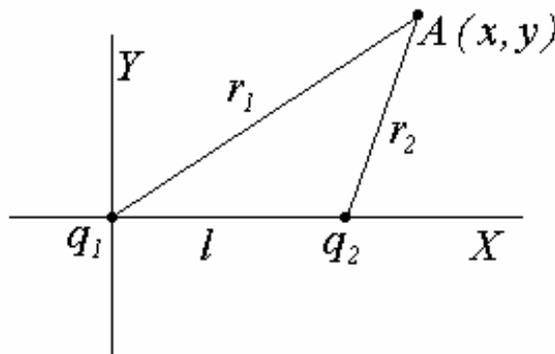


Заметим, что на границе области могут существовать заряды, однако даже при неизвестном их распределении, задание потенциала на границе однозначно определяет поле внутри области. Поэтому две различные задачи, но с одинаковыми распределениями зарядов внутри области и одинаковыми потенциалами на границе имеют внутри области одинаковые решения. Иногда при неизвестном распределении индуцированных зарядов на границе удается подобрать такое распределение зарядов вне рассматриваемой области, что для нового распределения оказываются выполненными граничные условия исходной задачи. В этом случае дополнительные заряды называются зарядами-изображениями. Поиск изображений имеет смысл вести тогда, когда новая задача оказывается проще исходной и имеет простое решение.

Помимо задания распределения потенциала, в качестве граничных условий могут использоваться и некоторые другие, например, значение напряженности поля. Формулировке граничных условий, по этой причине уделяется серьезное внимание в курсе электродинамики.

1. Выберем систему координат, так чтобы заряд q_1 находился в начале координат, а заряд q_2 на оси X .

Так задача обладает осевой симметрией, то достаточно показать, что в плоскости XU линия нулевого потенциала является окружностью. Запишем выражение для потенциала электростатического поля в произвольной точке A с координатами (x, y)



$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \right). \quad (1)$$

Полагая $\varphi = 0$, получим уравнение, определяющее линию нулевого потенциала:

$$\frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} = 0. \quad (2)$$

Обозначим $\frac{q_2}{q_1} = k$ и преобразуем уравнение (2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= -\frac{k}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}; \\ (x-l)^2 + y^2 &= k^2(x^2 + y^2); \\ \left(x + \frac{l}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 &= \frac{k^2 l^2}{(k^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее уравнение и есть уравнение окружности радиуса

$$R = \frac{kl}{k^2 - 1} \quad (4)$$

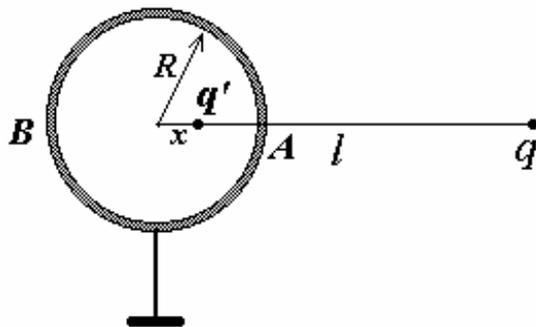
с центром в точке, лежащей на оси X с координатой $x_c = -\frac{l}{k^2 - 1}$.

Заметим, что существенно, что заряды должны иметь разные знаки, иначе уравнение (2) не будет являться уравнением окружности, кроме того, необходимо, чтобы величины зарядов различались ($k \neq 1$).

При $k = 1$ из уравнений (3) следует уравнение нулевого потенциала $x = \frac{l}{2}$, которое описывает плоскость, проходящую посередине между одинаковыми точечными зарядами.

2. На поверхности металлической заземленной сферы возникнут индуцированные заряды, распределение которых заранее не известно, однако потенциал сферы равен нулю. В предыдущем разделе мы показали, что поле двух точечных зарядов имеет в качестве поверхности нулевого потенциала сферу. Теперь мы можем использовать этот результат.

Для этого необходимо внутри сферы построить заряд изображение q' , такой, чтобы поле двух точечных зарядов имело нулевой потенциал на поверхности сферы. В этом случае вне сферы поле двух точечных зарядов q, q' и поле, создаваемое зарядом q и



зарядами, индуцированными на поверхности металлической сферы, будут

одинаковыми. (Вне сферы распределения зарядов одинаковы, на границе - одинаковые граничные условия).

Для определения величины заряда-изображения q' и его положения можно, конечно, воспользоваться полученным ранее уравнением, однако проще потребовать выполнения условия $\varphi = 0$ в двух точках сферы A и B :

$$\begin{aligned} \frac{q}{l-R} &= -\frac{q'}{R-x}, \\ \frac{q}{l+R} &= -\frac{q'}{R+x}, \end{aligned} \quad (5)$$

Решив эту систему относительно неизвестных q' и x , получим

$$q' = -q \frac{R}{l}; \quad x = \frac{R^2}{l}. \quad (6)$$

Таким образом, поле вне сферы эквивалентно полю двух точечных зарядов. Внутри сферы эти поля, конечно же, различаются.

Для определения суммарного индуцированного заряда воспользуемся теоремой Гаусса. Окружим сферу замкнутой поверхностью. По теореме Гаусса, поток вектора напряженности электрического поля через эту поверхность равен суммарному заряду внутри поверхности, деленному на ϵ_0 . Так поле индуцированных зарядов эквивалентно полю заряда изображения, то и суммарный индуцированный заряд равен величине заряда-изображения.

Еще раз подчеркнем - вне сферы поля эквивалентны, но это не значит, что индуцированные заряды концентрируются в одной точке - они распределены по поверхности сферы.

Силу взаимодействия между сферой и точечным зарядом можно найти как силу взаимодействия между двумя точечными зарядами q, q' :

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(l-x)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Rl}{(l^2 - R^2)^2}. \quad (7)$$

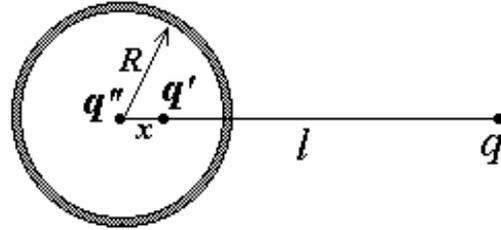
Заметим, что при $l \gg R$ формула (7) дает

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{l^3}, \quad (8)$$

то есть сила убывает обратно пропорционально кубу расстояния.

3. Если сфера не заземлена, то потенциал ее отличен от нуля, но по-прежнему постоянен. Однако, для изолированной сферы суммарный индуцированный заряд равен нулю - в поле точечного заряда произойдет перераспределение зарядов по поверхности сферы. Мы можем легко добиться выполнения граничных условий, поместив в центр шара еще один заряд-изображение $q'' = -q'$. В этом случае эквипотенциальность сферы не нарушится, а ее суммарный заряд останется равным нулю.

Итак, вне сферы поле, создаваемое точечным зарядом q и индуцированными зарядами на поверхности, эквивалентно полю трех точечных зарядов q, q', q'' .



Индуцированный дипольный момент сферы равен дипольному моменту двух зарядов-изображений

$$d = q'x = q \frac{R^3}{l^2}. \quad (9)$$

Сила, действующая на заряд q , также легко вычисляется

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(l-x)^2} + \frac{qq''}{4\pi l^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^3(2l^2 - R^2)}{l^3(l^2 - R^2)^2}. \quad (10)$$

При $l \gg R$ сила взаимодействия

$$F = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{l^5}, \quad (11)$$

убывает обратно пропорционально пятой степени расстояния.

Замечания.

1. Можно вычислить потенциал сферы, не рассчитывая распределения зарядов на поверхности. По принципу суперпозиции, потенциал центра сферы равен сумме потенциалов заряда q и индуцированных зарядов на поверхности сферы. Все индуцированные заряды находятся на одном и том же расстоянии от центра и их сумма равна нулю, следовательно, равен нулю и потенциал, создаваемый ими в центре сферы. Поэтому потенциал в центре сферы, а, следовательно, и в любой ее точке, равен потенциалу поля точечного заряда $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l}$.

2. Перепишем формулу для индуцированного дипольного момента сферы (9) в виде

$$d = q \frac{R^3}{l^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} \epsilon_0 (4\pi R^3) \quad (12)$$

и сравним ее с общим выражением для индуцированного дипольного момента

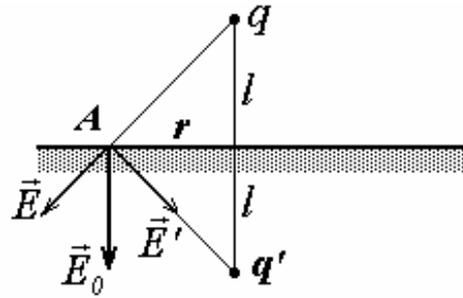
$d = \alpha \epsilon_0 E$ (α - называется поляризуемостью и имеет размерность объема, E - напряженность внешнего электрического поля). Видим, что поляризуемость проводящей сферы и шара равна утроенному объему.

4. Построение заряда изображения в плоской проводящей пластине широко известно. Достаточно расположить заряд-изображение равный по величине и противоположный по знаку исходному и симметрично ему и граничные условия ($\varphi = 0$ на поверхности пластины будут выполнены).

Напряженность поля у границы \vec{E}_0 можно рассчитать по принципу суперпозиции как сумму полей, создаваемых исходным зарядом \vec{E} и его изображением \vec{E}' :

$$\vec{E}_0 = \vec{E}' + \vec{E}.$$

Суммарный вектор направлен перпендикулярно границе и равен



$$E = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)} \cos \alpha = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (13)$$

здесь r расстояние от основания перпендикуляра из заряда на плоскость пластины до рассматриваемой точки. Поверхностная плотность заряда у поверхности проводника связана с напряженностью поля соотношением $\sigma = \epsilon_0 E$, поэтому распределение поверхностной плотности индуцированных зарядов на пластине осесимметрично и имеет вид

$$\sigma = \frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (14)$$

Заметим, что такое распределение поверхностных зарядов создает в верхнем полупространстве такое же поле, как и поле точечного заряда q' . Ввиду явной симметрии такое же поле возникает и в нижней половине (то есть поле заряда q' , расположенного в той же точке, что и исходный заряд q). Это поле индуцированных зарядов складывается с полем исходного заряда, поэтому и оказывается, что в нижнем полупространстве поле равно нулю, как и должно быть внутри проводника.

Сила взаимодействия заряда и пластины равна силе взаимодействия зарядов q и q' :

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}. \quad (15)$$

Энергия взаимодействия равна половине (!) энергии взаимодействия зарядов q и q' . Заметьте, что две задачи (заряд и пластина - два заряда) эквивалентны только в верхнем полупространстве. Реально поле существует только в верхней половине пространства. Так энергия взаимодействия есть энергия поля, то и энергия взаимодействия будет в два раза меньше. Поэтому

$$W = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}. \quad (16)$$

Замечания.

1. Этот же результат для энергии взаимодействия получается, если вычислить энергию взаимодействия, как работу, которую необходимо совершить, чтобы унести заряд на бесконечность

$$W = \int_l^{\infty} \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2} dl.$$

Еще одно интересное, на мой взгляд, пояснение, почему энергия взаимодействия уменьшается в два раза. При двух реальных точечных зарядах при перемещении одного из них второй остается неподвижным. Если же уносить заряд от проводящей границы, то его изображение также удаляется.

2. Интересно отметить, что переход к плоской границе можно осуществить, используя полученное ранее решения для заземленной сферы. Для этого заменим расстояние до центра сферы l расстоянием до ее поверхности $h = l - R$, то есть, положим $l = h + R$ и в формулах (6),(7) устремим радиус сферы к бесконечности (сфера бесконечного радиуса есть плоскость).

Тогда получим все формулы, соответствующие взаимодействию точечного заряда и плоскости:

$$q' = -q \frac{R}{l} = -q \frac{R}{R+h} \rightarrow -q;$$

$$R - x = R - \frac{R^2}{l} = R - \frac{R^2}{R+h} = \frac{Rh}{R+h} \rightarrow h;$$

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Rl}{(l^2 - R^2)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R(R+h)}{((R+h)^2 - R^2)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R(R+h)}{(2Rh + h^2)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}$$

Обратный переход от плоскости к сфере невозможен. Иными словами, «уйти на бесконечность легко, вернуться трудно!»

5. Найдем напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара. На расстоянии r от центра шара напряженность поля определяется только зарядами, находящимися от центра на расстоянии не больше r (внешние слои не создают поле внутри). Поле сферически симметричного распределения зарядов совпадает с полем точечного заряда, поэтому напряженность электрического поля внутри сферы рассчитывается по формуле

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0},$$

учитывая направление поля, данное соотношение можно записать в векторной форме

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}, \quad (17)$$

где \vec{r} - вектор, соединяющий центр сферы и точку наблюдения.

Будем рассматривать полость внутри шара как наложение сплошного шара с объемной плотностью заряда ρ и шара, совпадающего по с полостью с равномерно распределенным зарядом плотностью $-\rho$.

Тогда по принципу суперпозиции поле внутри полости можно представить в виде

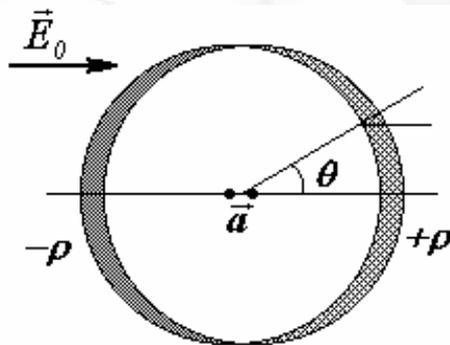
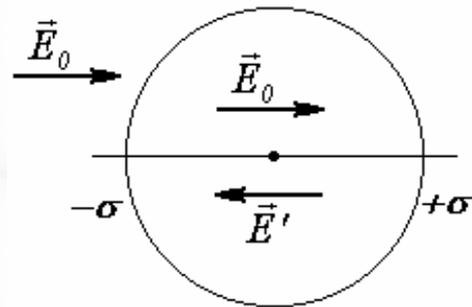
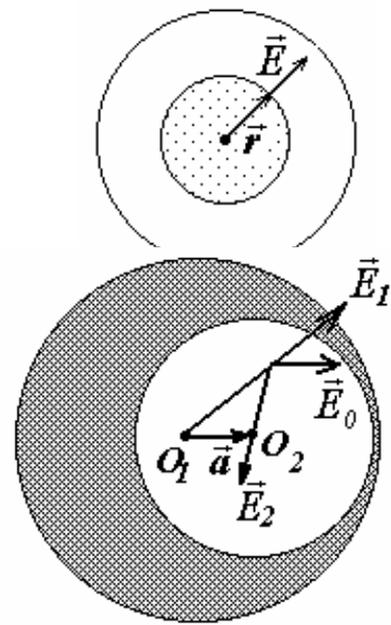
суммы $\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где \vec{E}_1 - поле, создаваемое сплошным шаром, \vec{E}_2 - поле, создаваемое зарядами полости. Используя формулу (17), получим

$$\vec{E}_0 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0} - \frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0} = \frac{\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{3\epsilon_0} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}. \quad (18)$$

При выводе учтено, что $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{a}$ вектор, соединяющий центры шара и полости. Существенно, что поле внутри полости оказывается однородным.

6. На поверхности шара, помещенного в электрическое поле, индуцируются заряды. Причем распределение этих зарядов должно быть таким, чтобы суммарное поле внутри шара было равно нулю. Иными словами, необходимо придумать такое распределение зарядов σ на поверхности шара, чтобы создаваемое ими поле \vec{E}' было однородным, равным по модулю внешнему полю \vec{E}_0 и направленным в противоположную сторону. В предыдущем разделе мы показали, что поле в сферической полости равномерно заряженного шара является однородным - используем здесь этот результат.

Представим шар как наложение двух равномерно заряженных шара с зарядами противоположного знака, смещенных друг относительно друга на малый вектор \vec{a} . Тогда заряды «останутся» только в тонком поверхностном слое переменной толщины. При малом смещении объемный заряд тонкого слоя можно заменить поверхностным, причем поверхностная



плотность заряда будет пропорциональна толщине слоя. Поле, создаваемое индуцированными зарядами можно вычислить по формуле (18)

$$E' = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}.$$

Полагая напряженность этого поля равной напряженности внешнего поля, получаем

$$\rho a = 3\varepsilon_0 E_0. \quad (19)$$

Удобно рассматривать поверхностную плотность заряда как функцию угла θ между направлением внешнего поля и направлением на точку наблюдения. Толщина заряженного слоя в точке, определяемой углом θ , равна $h = a \cos \theta$. Поэтому поверхностная плотность заряда подчиняется уравнению

$$\sigma = \rho h = \rho a \cos \theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (20)$$

Таким образом, мы представили распределение индуцированных зарядов как наложение двух равномерно заряженных шаров. Поле равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, поэтому дипольный момент шара равен дипольному моменту двух точечных зарядов, помещенных в центры смещенных шаров:

$$d = Qa = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho a = 4\pi R^3 \varepsilon_0 E_0. \quad (21)$$

Замечания.

1. Заметьте, что во всех выражениях, описывающих поляризацию шара, фигурирует только произведение фиктивно введенных величин ρa , что обосновывает применение перехода $a \rightarrow 0$. Действительно, формально можно полагать смещение очень малым, а объемную плотность заряда большой, но такими, чтобы их произведение оставалось неизменным.

2. Поляризуемость шара в однородном поле оказалась равной его утроенному объему.

3. Решение этой задачи можно получить также с помощью перехода от решений пункта

3. Будем считать, что изолированный проводящий шар находится в поле точечного заряда Q , расположенного на расстоянии l от центра шара. Устремим $l \rightarrow \infty$, при этом, увеличивая заряд шара так, чтобы напряженность поля, создаваемого точечным

зарядом оставалась в месте шара постоянной и равной E_0 , то есть $E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$,

откуда $Q = 4\pi\varepsilon_0 l^2 E_0$. Тогда по формуле (9) индуцированный дипольный момент шара

равен $d = q \frac{R^3}{l^2} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0$, что совпадает с полученным выше значением. Далее

можно найти напряженность поля у поверхности шара как суперпозицию внешнего однородного поля и поля диполя, помещенного в центре шара, а затем и поверхностную плотность зарядов.

Рекомендую проделать этот путь самостоятельно.

7. Пусть «газ» находится во внешнем электрическом поле, напряженностью E_0 . Тогда каждый шарик приобретает индуцированный дипольный момент, рассчитываемый по формуле (21): $d = 4\pi r^3 \varepsilon_0 E_0$, следовательно,

индуцированный дипольный момент единицы объема (поляризация среды) будет определяться по формуле

$$P = nd = 4\pi r^3 n \varepsilon_0 E_0. \quad (22)$$

Используя формулу, приведенную в условии $\varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, запишем

$$\varepsilon \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E_0 + P = \varepsilon_0 E_0 + 4\pi r^3 n \varepsilon_0 E_0,$$

откуда следует, что диэлектрическая проницаемость описанного «газа» рассчитывается по формуле

$$\varepsilon = 1 + 4\pi r^3 n. \quad (23)$$

Конечно, молекулы воздуха не являются металлическими шариками, однако формула (23) дает оценку диэлектрической проницаемости газа, и мы используем ее для оценки среднего радиуса молекул

$r = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon - 1}{4\pi n}}$. Концентрация молекул при нормальных условиях найдем из уравнения $p = nkT$, где p, T - давление и температура газа. Таким образом, окончательное выражение для оценки размеров молекул приобретает вид

$$r = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{kT}{p}} \approx 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (24)$$

Мы получили несколько заниженное значение, однако порядок величины соответствует действительности.

Замечания.

1. При расчетах мы полагали, что концентрация молекул мала, поэтому полностью пренебрегли взаимным влиянием шариков друг на друга.

Расчет электрических полей в присутствии диэлектриков намного сложнее, чем решение аналогичных задач для проводников. Математически это усложнение заключается в других граничных условиях. Так для проводников, находящихся в электростатическом поле выполняются условия: потенциал проводника постоянен; вектор напряженности поля у поверхности проводника перпендикулярен поверхности.

На границе диэлектриков при отсутствии на ней свободных зарядов выполняются условия:

- тангенциальные составляющие векторов напряженности полей одинаковы

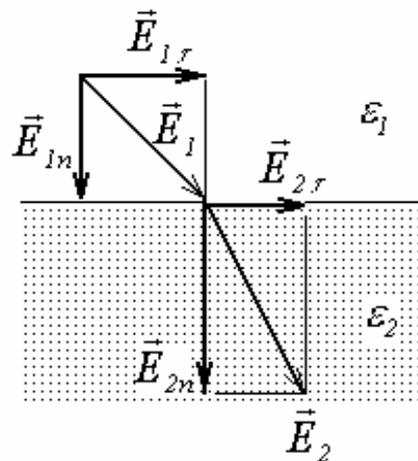
$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad (25)$$

- нормальные составляющие векторов напряженности претерпевают разрыв, такой, что выполняется соотношение

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad (26)$$

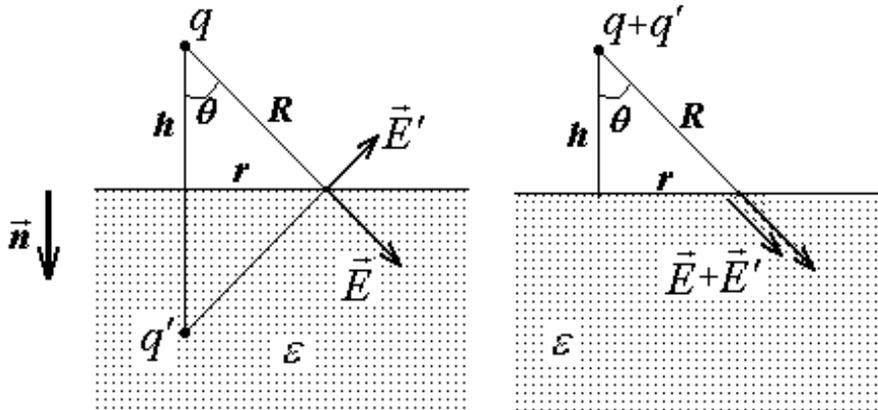
где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - диэлектрические проницаемости граничащих сред. Поверхностная плотность поляризационных зарядов на границе диэлектриков может быть найдена с помощью теоремы Гаусса и определяется по формуле

$$\sigma' = \varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}). \quad (27)$$



8. Предположим, что на плоской границе диэлектрика, взаимодействующего с точечным зарядом q , возникают поляризационные заряды, распределение σ' которых совпадает с распределением зарядов на поверхности проводника, находящегося в аналогичных условиях (см. п.4 данной задачи). Такое распределение поверхностных зарядов, создает в полупространстве поле, эквивалентное полю точечного заряда.

Таким образом, будем рассматривать поле в верхнем полупространстве



над диэлектриком как суперпозицию зарядов q и q' , расположенных по разные стороны от границы, а поле внутри диэлектрика как поле двух точечных зарядов q и q' , расположенных в одной точке. Для того, чтобы доказать справедливость нашего предположения необходимо добиться выполнения граничных условий (25)-(26). Легко видеть, что условие постоянства тангенциальной составляющей выполняется при любом значении заряда-изображения q' . Попробуем подобрать такую величину этого заряда, что бы выполнялось граничное условие и для нормальных составляющих поля. Согласно нашему предположению, в пространстве над диэлектриком возле границы нормальная составляющая поля определяется формулой

$$E_{1n} = \frac{q - q'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta, \quad (28)$$

а внутри диэлектрика, непосредственно у границы

$$E_{2n} = \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta. \quad (29)$$

Граничное условие (26) будет выполняться в любой точке границы, если положить

$$q - q' = \epsilon(q + q'),$$

или

$$q' = -q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}. \quad (30)$$

Итак, мы показали, что предположение о характере распределения поляризационных зарядов на границе диэлектрика справедливо, так выполняются граничные условия.

Величина поверхностной плотности зарядов вычисляется по формуле (27), применение которой в данном случае приводит к результату

$$\sigma' = \frac{2q'}{4\pi R^2} \cos \theta = -\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{h}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (31)$$

Силу, действующую на точечный заряд, можно вычислить как силу взаимодействия двух точечных зарядов q и q' :

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2} = -\frac{q^2}{16\pi h^2} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}. \quad (32)$$

Замечания.

1. Прежде всего, честно признаемся, что решение этой задачи фактически угадано, правда, затем эта догадка строго доказана.

2. Переход от диэлектрика к проводнику в задачах электростатики может быть осуществлен, полагая $\varepsilon \rightarrow \infty$, действительно, в этом пределе формулы (31), (32) переходят в соответствующие формулы, полученные ранее для проводника в п.4. Если же положить $\varepsilon = 1$, то все индуцированные заряды исчезают, как и должно быть в отсутствие диэлектрика.

3. Отметим, что поле внутри диэлектрика в данном случае совпадает с полем точечного заряда, величина которого равна $q + q' = \frac{2q}{\varepsilon + 1}$. То есть диэлектрик уменьшает поле, но не в ε раз, как это бывает в случае бесконечного диэлектрика.

9. Предположим, что и в данном случае распределение поляризационных зарядов на поверхности диэлектрического шарика σ' совпадает с распределением индуцированных зарядов на поверхности металлической сферы (формула (20)), но отличается, конечно, по величине:

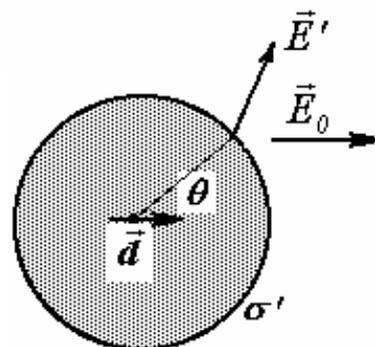
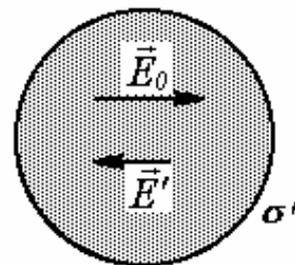
$$\sigma' = \sigma_0 \cos \theta. \quad (33)$$

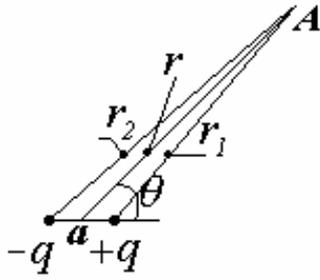
Такое распределение зарядов создает внутри шара однородное поле напряженности

$$E' = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}. \quad (34)$$

Этот результат сразу следует из формулы (20) - поле напряженностью E_0 индуцирует на поверхности шарика заряды $\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$, поле которых полностью компенсирует внешнее поле. Аналогично из формулы (21) следует вывод о поле вне шара.

Вне шарика поле поляризационных зарядов совпадает с полем точечного диполя с моментом равным $d = \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma_0$ и размещенным в центре шара.





Рассчитаем напряженность электрического поля, создаваемого диполем - системой двух точечных зарядов $+q, -q$, расположенных на небольшом расстоянии a друг от друга. Найдем первоначально потенциал поля в точке A , находящейся на расстоянии r от центра диполя на отрезке, образующем угол θ с осью диполя. По принципу суперпозиции

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

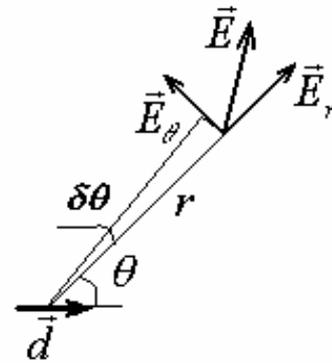
Расстояния до зарядов найдем по

теореме косинусов (используя также малость величины a)

$r_{1,2} = \sqrt{r^2 \mp 2r \frac{a}{2} \cos \theta + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \approx r \mp \frac{a}{2} \cos \theta$. В линейном приближении разность расстояний $r_2 - r_1 \approx a \cos \theta$, а их произведение $r_1 r_2 \approx r^2$. Тогда потенциал поля подчиняется выражению

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (35)$$

Вектор напряженности электрического поля \vec{E} разложим на две составляющие: \vec{E}_r - вдоль отрезка, соединяющего диполь и точку наблюдения и \vec{E}_θ - перпендикулярную ему. Используя известное соотношение между потенциалом и напряженностью, найдем



$$E_r = -\frac{\delta\varphi}{\delta r} = \frac{qa \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{d \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (36)$$

$$E_\theta = -\frac{\delta\varphi}{r\delta\theta} = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (37)$$

Вернемся к решению нашей задачи. Запишем выражения для нормальных и тангенциальных компонент поля с двух сторон от поверхности шарика. Внутри диэлектрика

$$E_{1r} = (E_0 - E') \sin \theta = \left(E_0 - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \right) \sin \theta \quad (38)$$

$$E_{1n} = (E_0 - E') \cos \theta = \left(E_0 - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \right) \cos \theta$$

У поверхности шарика снаружи

$$E_{2n} = E_0 \cos \theta + E'_r = E_0 \cos \theta + \frac{d \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} = E_0 \cos \theta + \frac{2\sigma_0 \cos \theta}{3\epsilon_0} \quad (39)$$

$$E_{2\tau} = E_0 \sin \theta - E'_\theta = E_0 \sin \theta - \frac{d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = E_0 \sin \theta - \frac{\sigma_0 \sin \theta}{3\epsilon_0}$$

Граничное условие для тангенциальных компонент поля выполняется при любом значении величины σ_0 , для выполнения условия для нормальных компонент необходимо положить

$$\varepsilon(E_0 - \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}) = (E_0 + \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}),$$

откуда следует:

$$\sigma_0 = 3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \varepsilon_0 E_0. \quad (40)$$

Окончательно получим, что поверхностная плотность поляризационных зарядов описывается формулой

$$\sigma' = 3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \varepsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (41)$$

Это распределение отличается от распределения зарядов на проводнике только множителем $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$, поэтому и индуцированный дипольный момент диэлектрического шарика будет меньше во столько же раз

$$d = 4\pi r^3 \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \quad (42)$$

Замечание.

Суммарное поле внутри шарика будет однородным и направленным, так же как и внешнее поле, однако, его величина будет меньше

$$E_1 = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0.$$

Поле вне шара перестанет быть однородным.

Обратите внимание, что множитель, показывающий во сколько раз изменилось поле, отличается от аналогичного множителя для случая плоской границы - тем самым мы продемонстрировали, что форма границы оказывает существенное влияние на поле внутри и снаружи от диэлектрика.

10. Для вычисления силы взаимодействия точечного заряда и диэлектрического шара воспользуемся результатами, полученными в предыдущем разделе. Так как размеры шарика значительно меньше расстояния до заряда, то можно считать, что шарик находится в однородном поле, в котором он приобретает дипольный момент

$$d = 4\pi r^3 \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = 4\pi r^3 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 l^2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{qr^3}{l^2}.$$

Величину напряженности поля, создаваемого поляризационными зарядами можно рассчитать по формуле (36), полагая в ней $\theta = 0$:

$$E = \frac{d}{2\pi \varepsilon_0 l^3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{qr^3}{2\pi \varepsilon_0 l^5}, \text{ следовательно, сила взаимодействия заряда и}$$

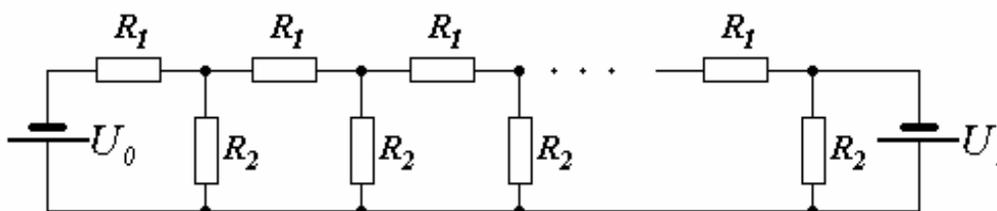
шарика определяется по формуле

$$F = qE = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{q^2 r^3}{2\pi \varepsilon_0 l^5}. \quad (43)$$

Замечания.

1. Рекомендую самостоятельно проанализировать переход от диэлектрика к проводнику в двух последних пунктах, полагая $\varepsilon \rightarrow \infty$.
2. Рассмотренные примеры взаимодействия диэлектриков с электростатическими полями являются, по-видимому, самыми простыми, так распределение зарядов на их поверхности оказывается таким же, как на поверхности проводника. Однако эти примеры является скорее исключением, чем правилом - попробуйте, например, найти распределение зарядов на поверхности диэлектрического шара, расположенного вблизи точечного заряда.

Задача 12 «Почти бесконечная цепочка»



Цепочка резисторов состоит из N одинаковых звеньев и подключена с одной стороны к источнику постоянного напряжения U_0 , а с другой к источнику постоянного напряжения U_1 .

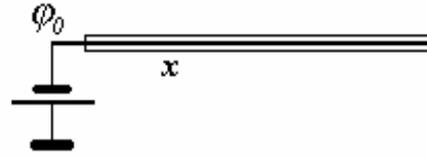
Для построения требуемых графиков используйте следующие значения параметров $R_2 = 20R_1$, $U_0 = 2U_1$

1. Найдите значения напряжений на всех резисторах R_2 . Постройте схематический график зависимости напряжения от номера резистора.
2. Найдите значения напряжений на резисторах R_2 , если источник U_1 отключить. Постройте схематический график зависимости напряжения от номера резистора.
3. Найдите значения напряжений на резисторах R_2 , если источник U_1 заменить на резистор сопротивлением r .
4. Найдите значения напряжений на всех резисторах R_2 при $N \rightarrow \infty$.
5. Найдите сопротивление цепи, состоящей из N звеньев. Рассмотрите случай $N \rightarrow \infty$.
6. Допустимая погрешность расчета сопротивления цепи, состоящей из N звеньев равна ε ($\varepsilon \ll 1$). При каком числе звеньев цепочку можно считать бесконечной? Получите результат в общем виде, а затем проведите численный расчет для а) $R_2 = 20R_1$; б) $R_2 = 2R_1$ при предельной погрешности $\varepsilon = 1\%$.

7. Данная задача является прекрасной моделью для описания кабеля с небольшой утечкой. При этом сопротивления R_1 описывают собственное сопротивление кабеля, а R_2 - сопротивление окружающей среды, по которой возможна некоторая утечка электрического тока.

Очень длинный медный провод диаметром $a = 1\text{ мм}$, покрытый слоем лака толщиной $h = 20\text{ мкм}$, находится в хорошо проводящей среде. Потенциал одного конца провода поддерживают равным $\varphi_0 = 100\text{ В}$.

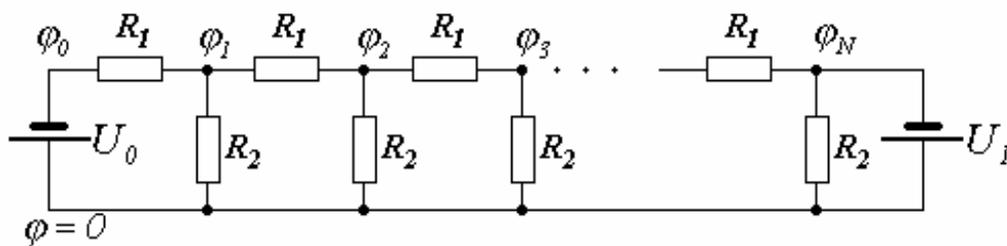
Найдите зависимость силы тока в проводе от расстояния до источника x .



Чему равна сила тока, потребляемая от источника? На каком расстоянии сила тока уменьшится в два раза?

Удельное электрическое сопротивление меди принять равным $\rho_1 = 2 \cdot 10^{-8}\text{ Ом} \cdot \text{м}$, удельное электрическое сопротивление покрывающего лака $\rho_2 = 2 \cdot 10^8\text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Решение.

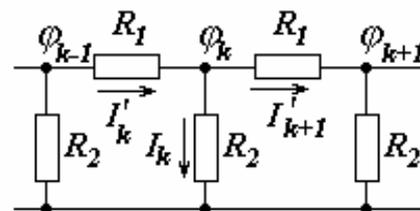


Положим потенциал общего провода равным $\varphi = 0$. Обозначим потенциалы узловых точек $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$. Очевидно, что $\varphi_0 = U_0$, а $\varphi_N = U_1$. Рассмотрим один из внутренних узлов.

По закону сохранения электрического заряда можно записать (обозначения см. на рисунке)

$$I'_k = I_k + I'_{k+1}. \quad (1)$$

Значения сил токов можно выразить через разности потенциалов по закону Ома. Тогда соотношение (1) будет иметь вид



$$\frac{\varphi_{k-1} - \varphi_k}{R_1} = \frac{\varphi_k}{R_2} + \frac{\varphi_k - \varphi_{k+1}}{R_1}. \quad (2)$$

Из уравнения (2) выразим значение потенциала φ_{k+1}

$$\varphi_{k+1} = \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right)\varphi_k - \varphi_{k-1}. \quad (3)$$

Соотношения (3) являются системой линейных уравнений для неизвестных значений потенциалов. Попробуем найти решение этой системы в общем

виде, при произвольном N . Заметим, что система уравнений (3) является линейной и однородной, поэтому для ее решений справедлив принцип суперпозиции: любая линейная комбинация решений также является решением этой системы. Поэтому будем искать частные решения в виде

$$\varphi_k = \lambda^k. \quad (4)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3), получим

$$\lambda^{k+1} = \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right)\lambda^k - \lambda^{k-1},$$

или после сокращения

$$\lambda^2 = \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right)\lambda - 1. \quad (5)$$

решением этого квадратного уравнения являются числа

$$\lambda_{1,2} = \left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right)^2 - 1} \quad (6)$$

Обратим внимание, что оба корня являются положительными, а их произведение равно единице, поэтому больший корень обозначим $\lambda_1 = \lambda$, тогда меньший $\lambda_2 = 1/\lambda = \lambda^{-1}$.

С учетом оговоренного ранее принципа суперпозиции, общее решение системы (3) будет иметь вид

$$\varphi_k = A\lambda^k + B\lambda^{-k}, \quad (7)$$

где A, B - произвольные постоянные, которые определяются из дополнительных (граничных) условий.

Для приведенного значения отношения сопротивлений численное значение параметра $\lambda = 1,25$, $\lambda^{-1} = 0,8$. Заметим, что $\lambda^{-N} = \lambda^{-20} \approx 0,01$, что является достаточно малой величиной.

1. Если цепь подключена к двум источникам напряжения, то для определения двух неизвестных A, B следует воспользоваться соотношениями $\varphi_0 = U_0$, $\varphi_N = U_1$, или в явном виде

$$\begin{cases} U_0 = A + B \\ U_1 = A\lambda^N + B\lambda^{-N} \end{cases} \quad (8)$$

Решение системы (8) имеет вид

$$\begin{cases} A = \frac{U_1 - U_0\lambda^{-N}}{\lambda^N - \lambda^{-N}} \\ B = \frac{U_0\lambda^N - U_1}{\lambda^N - \lambda^{-N}} \end{cases}. \quad (9)$$

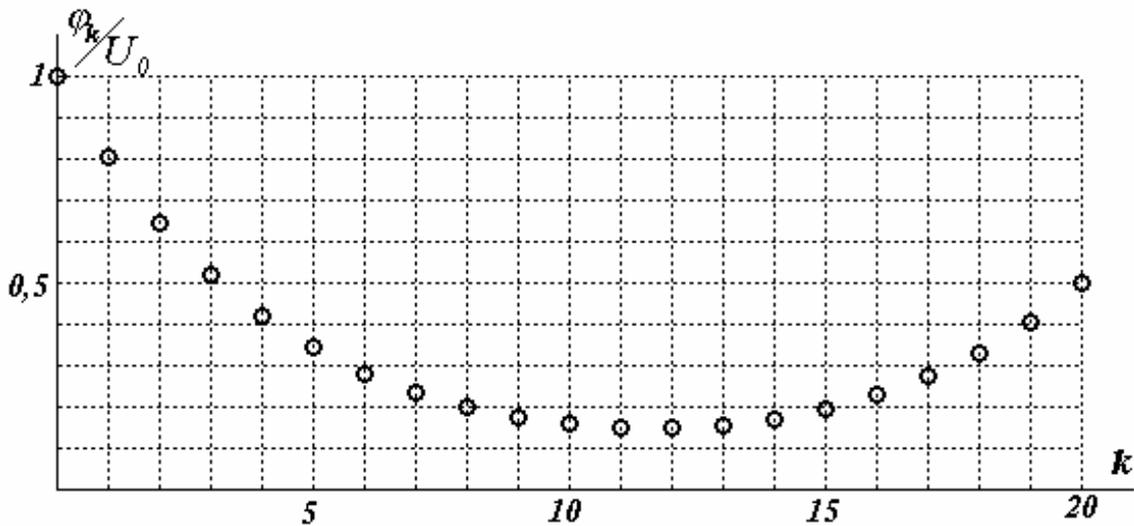
Следовательно, распределение потенциалов узловых точек будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{U_1 - U_0 \lambda^{-N}}{\lambda^N - \lambda^{-N}} \lambda^k + \frac{U_0 \lambda^N - U_1}{\lambda^N - \lambda^{-N}} \lambda^{-k} = \\ &= \frac{U_0 (\lambda^{N-k} - \lambda^{-(N-k)}) + U_1 (\lambda^k - \lambda^{-k})}{\lambda^N - \lambda^{-N}} \end{aligned} \quad (10)$$

Для построения требуемого графика преобразуем полученную формулу к виду, более удобного для анализа

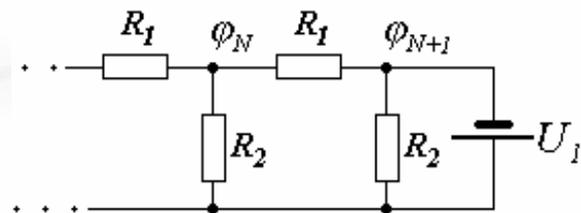
$$\begin{aligned} \varphi_k &= U_0 \frac{\lambda^{N-k} - \lambda^{-(N-k)}}{\lambda^N - \lambda^{-N}} + U_1 \frac{\lambda^k - \lambda^{-k}}{\lambda^N - \lambda^{-N}} = U_0 \frac{\lambda^{-k} - \lambda^{-(2N-k)}}{1 - \lambda^{-2N}} + U_1 \frac{\lambda^{-(N-k)} - \lambda^{-k-N}}{1 - \lambda^{-2N}} \approx T \\ &\approx U_0 \lambda^{-k} + U_1 \lambda^{-(N-k)} \end{aligned}$$

аким образом, данная функция является суммой двух убывающих геометрических прогрессий, одна из которых начинается с точки $k=0$, а вторая с $k=N$. График этой функции представлен на рисунке.



2. Заметим, что для ответа на этот вопрос, в формулах (10) нельзя положить $U_1 = 0$, так как это условие выполняется не при отключенном источнике, а при замкнутном.

Мысленно добавим к цепочке еще одно звено. Теперь отключение источника соответствует отсутствию тока в этом дополнительном звене. Формально это условие можно записать в виде равенства потенциалов



$$\varphi_N = \varphi_{N+1}. \quad (11)$$

Добавив к этому равенству значение начального потенциала $\varphi_0 = U_0$, получим систему уравнений для определения неизвестных параметров общего решения (7):

$$\begin{cases} U_0 = A + B \\ A\lambda^N + B\lambda^{-N} = A\lambda^{N+1} + B\lambda^{-N-1} \end{cases} \quad (12)$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases} A = \frac{U_0}{\lambda^{2N+1} + 1} \\ B = \frac{U_0 \lambda^{2N+1}}{\lambda^{2N+1} + 1} \end{cases} \quad (13)$$

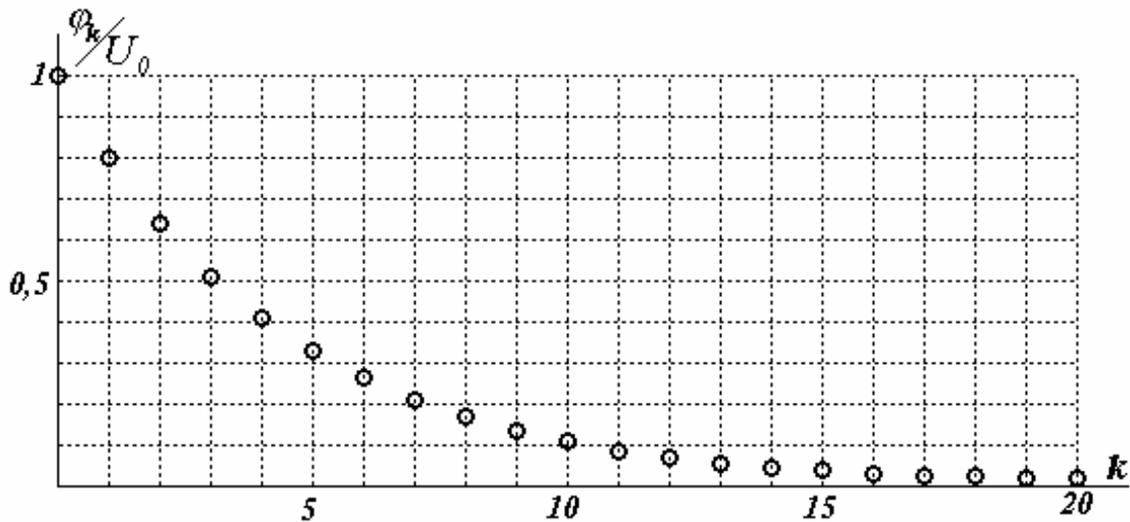
а соответствующее распределение потенциала

$$\varphi_k = \frac{U_0}{\lambda^{2N+1} + 1} (\lambda^k + \lambda^{2N+1-k}). \quad (14)$$

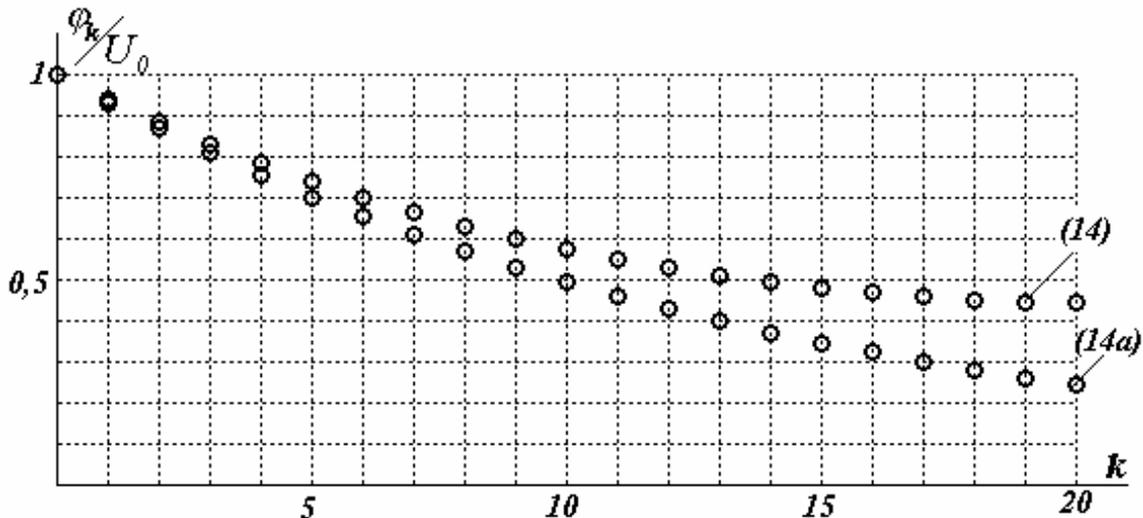
Преобразуем это выражение к более удобному виду

$$\varphi_k = \frac{U_0}{\lambda^{2N+1} + 1} (\lambda^k + \lambda^{2N+1-k}) = U_0 \frac{\lambda^{k-2N-1} + \lambda^{-k}}{1 + \lambda^{-2N-1}} \approx U_0 \lambda^{-k}. \quad (14a)$$

График этой функции изображен ниже.

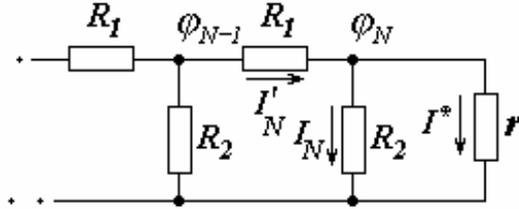


При большем значении сопротивления R_2 различия между графиком точной функции (14) и ее приближенным значением достаточно заметны. Так на следующем рисунке построены эти зависимости для $R_2 = 200R_1$.



3. При замене источника U_1 на резистор изменится граничное условие на втором конце цепи.

В этом случае сила тока I'_N будет равна сумме токов через резисторы R_2 и r . Это условие приводит к следующему соотношению между потенциалами



$$\frac{\varphi_{N-1} - \varphi_N}{R_1} = \frac{\varphi_N}{R_2} + \frac{\varphi_N}{r}, \quad (15)$$

которое преобразуется к виду $\varphi_N = g\varphi_{N-1}$, где обозначено

$$g = \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Таким образом, система граничных условий для определения коэффициентов функции (7) будет иметь вид

$$\begin{cases} U_0 = A + B \\ A\lambda^N + B\lambda^{-N} = g(A\lambda^{N-1} + B\lambda^{-(N-1)}) \end{cases} \quad (17)$$

Из этой системы можно найти значение коэффициентов, которые затем следует подставить в выражение (7). Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат.

$$\varphi_k = U_0 \frac{(1 - g\lambda^{-1})\lambda^{-k} + (g\lambda - 1)\lambda^{-2N+k}}{(1 - g\lambda^{-1}) + (g\lambda - 1)\lambda^{-2N}}. \quad (18)$$

4. Результаты для бесконечной цепочки можно получить, если устремить $N \rightarrow \infty$ в любой из формул (10) или (14). Однако этот же результат можно сразу определить из граничных условий, если заметить, что в этом случае при $k \rightarrow \infty$, потенциал должен стремиться к нулю $\varphi_k \rightarrow 0$. Поэтому следует задать $A = 0$, откуда сразу следует $B = U_0$, а распределение потенциала имеет вид

$$\varphi_k = U_0 \lambda^{-k}. \quad (19)$$

5. Получим значение сопротивления цепочки, содержащей N звеньев, используя закон Ома:

$$R_\Sigma = \frac{U_0}{I}, \quad (20)$$

где I сила тока в цепи, которая равна силе тока через первый резистор

$$I = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R_1}. \quad (21)$$

Используя формулу (14) получим значение напряжения на первом резисторе

$$\varphi_0 - \varphi_1 = U_0 \left(1 - \frac{\lambda^{2N} + \lambda}{\lambda^{2N+1} + 1} \right),$$

а затем и сопротивление всей цепи

$$R_{\Sigma} = \frac{R_1}{1 - \frac{\lambda^{2N} + \lambda}{\lambda^{2N+1} + 1}}. \quad (22)$$

При $N \rightarrow \infty$ это выражение существенно упрощается

$$R_{\Sigma} \approx \frac{R_1}{1 - \lambda^{-1}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} R_1, \quad (23)$$

причем полученное выражение можно получить непосредственно из распределения потенциала (19).

Убедитесь самостоятельно, что полученное выражение в точности совпадает с ответом весьма популярной задачи о бесконечной цепочке

$$R_{\Sigma} = \frac{R_1}{2} + \sqrt{\frac{R_1^2}{4} + R_1 R_2}.$$

Отметим также, что при $N = 1$, формула (22) приводит к очевидному результату $R_{\Sigma} = R_1 + R_2$.

6. Преобразуем формулу (22), полагая $\lambda^{-2N} \ll 1$:

$$\begin{aligned} \frac{R_{\Sigma}}{R_1} &= \frac{\lambda^{2N+1} + 1}{\lambda^{2N+1} + 1 - \lambda^{2N} - \lambda} = \frac{\lambda^{2N+1} + 1}{(\lambda - 1)(\lambda^{2N} - 1)} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{1 + \lambda^{-2N-1}}{1 - \lambda^{-2N}} \approx \\ &\approx \frac{\lambda}{\lambda - 1} (1 + \lambda^{-2N-1} + \lambda^{-2N}) \end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что при замене длинной, но конечной цепочки, на бесконечную, относительная ошибка расчета сопротивления цепи определяется формулой

$$\varepsilon \approx \lambda^{-2N-1} + \lambda^{-2N} = \lambda^{-2N-1} (1 + \lambda), \quad (24)$$

из которой можно найти значение числа звеньев N , при котором цепочку можно считать бесконечной

$$N \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \frac{\varepsilon}{1 + \lambda}}{\ln \lambda} + 1 \right). \quad (25)$$

Численные расчеты показывают, что для случая а) $R_2 = 20R_1$ минимальное значение $N = 13$. Для случая б) $R_2 = 2R_1$ требуемая точность достигается уже при $N = 4$.

7. Будем рассматривать провод с малой утечкой тока через боковую поверхность как цепь, изучаемую в данной задаче. Мысленно разобьем провод на малые участки длиной δ . Тогда сопротивления R_1, R_2 соответствующие этому участку могут быть записаны в виде

$$R_1 = \rho_1 \frac{4\delta}{\pi a^2}, \quad R_2 = \rho_2 \frac{h}{\pi a \delta}. \quad (26)$$

Их отношение $\frac{R_1}{R_2} = \frac{4\rho_1}{\rho_2 h a} \delta^2$ является бесконечно малой величиной второго порядка по δ (не говоря уж о малости отношения удельных сопротивлений). Учитывая малость этого отношения, найдем значения параметра λ :

$$\lambda = \left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right)^2 - 1} \approx 1 + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = 1 + \delta \sqrt{\frac{4\rho_1}{\rho_2 h a}} = 1 + \beta\delta, \quad (27)$$

где мы пренебрегли всеми членами, порядок малости которых превышает первый, и обозначили $\beta = \sqrt{\frac{4\rho_1}{\rho_2 h a}} \approx 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$.

Воспользуемся теперь формулой (19) для распределения потенциала в бесконечной цепи, в которой в качестве номера звена k следует взять отношение $\frac{x}{\delta}$. Напомним, δ - длина участка проволоки который мы рассматриваем как одно звено, поэтому на длине x укладывается $k = \frac{x}{\delta}$ звеньев. Итак, распределение потенциала на проволоке будет иметь вид

$$\varphi = \varphi_0 \lambda^{-k} = \varphi_0 (1 + \beta\delta)^{-\frac{x}{\delta}} \approx \varphi_0 \exp(-\beta x). \quad (28)$$

Данное неравенство становится точным при переходе к пределу $\delta \rightarrow 0$. Для вычисления силу тока опять рассмотрим участок провода длиной δ . По закону Ома сила тока на этом участке определяется по формуле

$$I = \frac{\varphi(x) - \varphi(x + \delta)}{R_1} = \frac{\pi a^2}{\rho_1} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(x + \delta)}{4\delta} = -\frac{\pi a^2}{4\rho_1} \frac{d\varphi}{dx},$$

где очередной раз учтена малость δ . Используя выражение (28) получим окончательную формулу:

$$I = -\frac{\pi a^2}{4\rho_1} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\pi a^2}{4\rho_1} \beta \varphi_0 \exp(-\beta x) = \varphi_0 \frac{\pi a^2}{2\sqrt{\rho_1 \rho_2 a h}} \exp(-\beta x). \quad (29)$$

Ток I_0 , потребляемый от источника, следует рассчитывать, полагая в этой формуле $x = 0$. Поэтому

$$I_0 = \varphi_0 \frac{\pi a^2}{2\sqrt{\rho_1 \rho_2 a h}} \approx 0,6 \text{ А}$$

Заметим, что эффективное сопротивление этой системы $R^* = \frac{\varphi_0}{I_0} \approx 180 \text{ Ом}$. Сила тока убывает по экспоненциальному закону, ток

уменьшится в два раза, когда $\exp(-\beta x) = 1/2$. Откуда следует,

$$x = \frac{\ln 2}{\beta} \approx 5 \text{ км}.$$

Комментарии к задаче.

1. Решение данной задачи демонстрирует метод получения явных выражений членов последовательностей, которые заданы рекуррентными соотношениями типа (3). Отметим, что наиболее важными моментами этого поиска являются
 - вид решения в виде геометрической последовательности (с определением возможных значений ее знаменателя);
 - использование принципа суперпозиции для линейных соотношений;
 - использование граничных условий для определения неизвестных коэффициентов.
2. Подобными уравнениями может описываться и процесс распространения тепла в стержне, если существует тепловой поток через боковую поверхность стержня. В этом случае в качестве потенциалов могут выступать температуры точек, величины подобные R_1 описывают теплопроводность стержня, а величины подобные R_2 - теплопроводность окружающей среды.
3. Обратите внимание на значимость граничных условий - они определяют окончательный вид решения! Необходимо уметь грамотно формулировать - эти условия. Например, соотношение (11) фактически означает отсутствие потока.

Задача для самостоятельного решения.

Медный провод длиной $l = 10 \text{ км}$ диаметром $a = 1 \text{ мм}$, покрытый слоем лака толщиной $h = 20 \text{ мкм}$, находится в хорошо проводящей среде. Потенциал одного конца



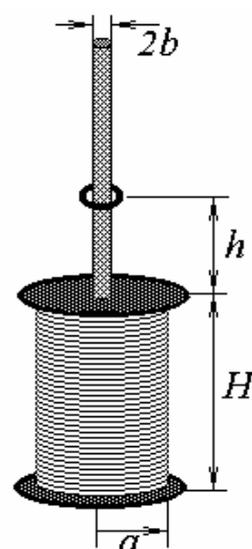
провода поддерживают равным $\varphi_0 = 100 \text{ В}$. Ко второму концу провода подключена полезная нагрузка сопротивлением $r = 100 \text{ Ом}$.

1. Найдите значение силы тока в нагрузке.
2. При каком значении сопротивления нагрузки мощность, выделяемая на ней, будет максимальна?
3. Найдите зависимость коэффициента передачи мощности (отношение мощности тока в нагрузке к мощности тока в источнике) от сопротивления нагрузки.

Удельное электрическое сопротивление меди принять равным $\rho_1 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, удельное электрическое сопротивление покрывающего лака $\rho_2 = 2 \cdot 10^8 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Задача 13. «Как гроб Магомета»

Вертикальная катушка содержит N витков, высота катушки H , ее радиус a . На оси катушки находится тонкий деревянный стержень толщиной b ($b \ll a$), по которому может скользить без трения проводящее кольцо, радиус которого чуть превышает радиус стержня. Электрическое сопротивление кольца R , индуктивность L , масса m . Если по катушке протекает переменный электрический ток круговой частоты ω с амплитудным значением силы тока I_0 , то кольцо приподнимается над катушкой.



В пунктах (1)-(4) считать, что по катушке протекает постоянный электрический ток силой I .

1. Найдите величину индукции магнитного поля, создаваемого одним витком катушки, на оси витка в зависимости от расстояния до центра витка.
2. Найдите зависимость индукции магнитного поля B на оси катушки от расстояния до нее h . При вычислениях воспользуйтесь формулой

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

3. Считая, что $h \ll a \ll H$, представьте полученное выражение для индукции поля в приближенном виде $B = B_0(1 + \beta h)$. Найдите значения постоянных B_0 и β .

В дальнейших пунктах используйте это приближенное выражение.

4. Найдите горизонтальную составляющую индукции магнитного поля на малом расстоянии b от оси катушки на высоте h .

Далее будем считать, что по катушке протекает переменный электрический ток круговой частоты ω с амплитудным значением силы тока I_0 .

5. Пусть кольцо находится на высоте h . Найдите значение силы тока в кольце и сдвиг фаз между током в кольце и током в катушке.

6. Найдите среднюю силу, действующую на кольцо, со стороны магнитного поля.

7. Считая высоту подъема кольца малой по сравнению с высотой катушки, покажите, что зависимость высоты подъема кольца от силы тока в катушке имеет вид $h = A - \frac{B}{I_0^2}$. Запишите выражения для параметров A, B .

Решение.

1. Выделим на кольце небольшой элемент длиной Δl . В точке A , находящейся на оси кольца на расстоянии h от его центра, он создает магнитное поле индукции

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{a^2 + h^2}, \quad (1)$$

направленный перпендикулярно отрезку, соединяющему элемент тока с точкой A .

Из очевидной осевой симметрии следует, что вектор суммарной индукции будет направлен по оси кольца. Проекцию вектора ΔB , определенного по формуле (1), на ось кольца можно найти по формуле

$$\Delta B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{a^2 + h^2} \cos \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{a^2 + h^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{a I \Delta l}{(a^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Так как все части кольца вносят одинаковый вклад в индукцию поля, то суммирование по всем элементам кольца сводится к замене Δl на длину витка $2\pi a$. Поэтому величина вектора индукции на оси кольца определяется формулой

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

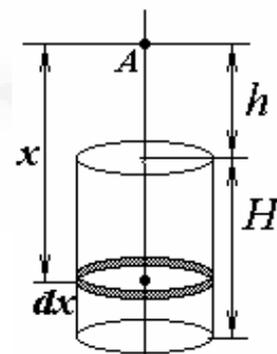
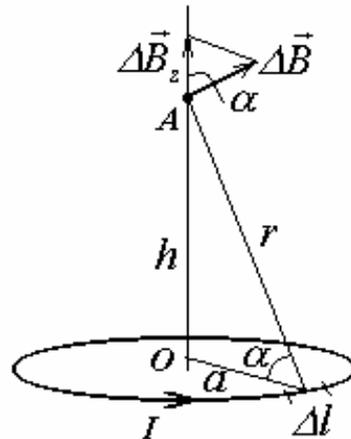
2. Выделим тонкий слой обмотки катушки толщиной dx , расположенный на расстоянии x от рассматриваемой точки A . Можно считать, что по этому слою протекает ток силой

$dI = IN \frac{dx}{H}$. Это ток создает магнитное поле в

точке A , определяемое формулой (2)

$$dB_z = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \frac{dx}{H}.$$

Чтобы найти индукцию поля, создаваемого всей катушкой, необходимо проинтегрировать это выражения по x в пределах от h до $h + H$.



$$B_z = \int_h^{h+H} \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \frac{dx}{H} = \frac{\mu_0 NI}{2H} \left(\frac{h+H}{\sqrt{(h+H)^2 + a^2}} - \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right). \quad (3)$$

3. В указанном приближении выражение (3) принимает вид

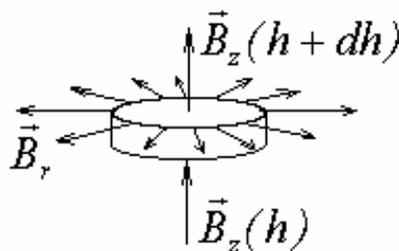
$$B_z = \frac{\mu_0 n I}{2} \left(1 - \frac{h}{a} \right), \quad (4)$$

где $n = \frac{N}{H}$ плотность намотки витков. Таким образом, искомые константы

определяются формулами $B_0 = \frac{\mu_0 n I}{2}$ - индукция поля на торце катушки;

$$\beta = -\frac{I}{a}.$$

4. Выделим мысленно цилиндр малой толщины dh радиуса b , соосный с катушкой. Будем считать, что в пределах оснований цилиндра вертикальная составляющая вектора индукции ($B_z(h+dh)$ - на верхнем основании и $B_z(h)$ на нижнем) изменяется



пренебрежимо мало. Так как магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю, можно записать

$$B_z(h+dh)\pi b^2 - B_z(h)\pi b^2 + B_r 2\pi b dh = 0.$$

Откуда радиальная составляющая вектора индукции может быть найдена по

формуле $B_r = -\frac{b}{2} \frac{B_z(h+dh) - B_z(h)}{dh} = -\frac{b}{2} \frac{dB_z}{dh}$. Используя выражение (4),

легко получить

$$B_r = \frac{\mu_0 n b}{4a} I. \quad (5)$$

5. Пусть ток в катушке изменяется с течением времени по закону

$$I = I_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

Тогда на высоте h индукция магнитного поля определяется формулой (4)

$$B_z = \frac{\mu_0 n I}{2} \left(1 - \frac{h}{a} \right) = \frac{\mu_0 n}{2} \left(1 - \frac{h}{a} \right) I_0 \cos \omega t = B_1 \cos \omega t, \quad (7)$$

где $B_1 = \frac{\mu_0 n}{2} \left(1 - \frac{h}{a} \right) I_0$ амплитудное значение индукции поля. Так как радиус

кольца значительно меньше радиуса катушки, то можно приближенно считать, что в пределах площади кольца вертикальная составляющая вектора индукции остается приблизительно постоянной и определяется формулой (7).

Поэтому магнитный поток через кольцо равен

$$\Phi = \pi b^2 B_1 \cos \omega t,$$

а ЭДС электромагнитной индукции по закону Фарадея вычисляется по формуле

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi b^2 B_1 \omega \sin \omega t = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad (8)$$

где $\varepsilon_0 = \pi b^2 B_1 \omega$ амплитудное значение ЭДС индукции в кольце.

Для нахождения сила тока в кольце $i = i_0 \cos(\omega t - \varphi)$ воспользуемся законом Ома для полной цепи - падение напряжения активном сопротивлении равно полной ЭДС $iR = \varepsilon_i + \varepsilon_{si}$, где $\varepsilon_{si} = -L \frac{di}{dt}$ ЭДС самоиндукции в кольце.

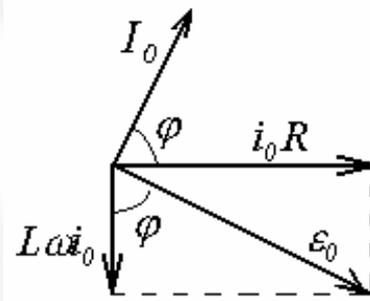
Подставляя значения для силы тока и ЭДС индукции, получим

$$i_0 R \cos(\omega t - \varphi) + L \omega i_0 \sin(\omega t - \varphi) = \varepsilon_0 \sin \omega t. \quad (9)$$

Представим это уравнение в форме векторной диаграммы. Здесь же изображен вектор силы тока в катушке $I = I_0 \cos \omega t$. Из диаграммы находим

$$i_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}; \quad (10)$$

$$\cos \varphi = \frac{L \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$



Подставив значения ε_0 и B_1 , получи окончательное выражение для силы тока в кольце

$$i = \frac{\mu_0 n}{2} \left(1 - \frac{h}{a}\right) \frac{\pi b^2 \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (11)$$

где сдвиг фаз определяется формулой (10).

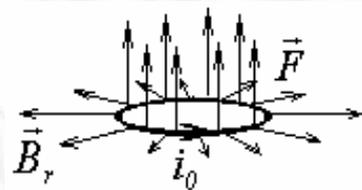
6. Со стороны магнитного поля, создаваемого катушкой, на кольцо с током действует сила Ампера. Причем величина вертикальной составляющей этой силы определяется радиальной компонентой вектора индукции. Мгновенное значение этой силы определяется выражением

$$F = 2 \pi b i B_r. \quad (12)$$

Чтобы получить среднее значение этой силы необходимо подставить в формулу (12) явные зависимости силы тока в кольце и индукции поля от времени и усреднить полученное выражение.

$$\langle F \rangle = 2 \pi b i_0 B_{r0} \langle \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t \rangle = \pi b i_0 B_{r0} \cos \varphi.$$

Здесь проведено усреднение произведения косинусов путем простых преобразований



$$\langle \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t \rangle = \langle \cos \omega t \cos \varphi \cos \omega t + \sin \omega t \sin \varphi \cos \omega t \rangle =$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle \cos \varphi + \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle \sin \varphi = \frac{\cos \varphi}{2}$$

Теперь осталось подставить выражения для всех параметров

$$\langle F \rangle = \frac{\pi^2 b^4}{2a} \left(\frac{\mu_0 n I_0}{2} \right)^2 \frac{L \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(1 - \frac{h}{a} \right). \quad (13)$$

7. Для того чтобы найти высоту подъема кольца необходимо выражение для средней силы Ампера приравнять к силе тяжести

$$\frac{\pi^2 b^4}{2a} \left(\frac{\mu_0 n I_0}{2} \right)^2 \frac{L \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(1 - \frac{h}{a} \right) = mg.$$

Из этого уравнения следует, что $h = A - \frac{B}{I_0^2}$, где

$$A = a;$$

$$B = \frac{8 m g a^2 (R^2 + L^2 \omega^2)}{\pi^2 b^4 L \omega^2 \mu_0^2 n^2}. \quad (14)$$

Замечания.

Описанное явление достаточно легко получить и исследовать экспериментально.

Теоретическое описание этого явления разбивается на две практически независимые части: пространственное описание магнитного поля и временные зависимости силы тока в кольце и индукции поля. Сделанные по ходу решения задачи приближения касаются только ее «пространственной части», принципиально возможно описание магнитного поля при более точном подходе.

«Временная часть» решения проведена без каких-либо существенных допущений. Единственное приближение - мы неявно пренебрегли влиянием тока в кольце на ток в катушке (взаимной индукцией). Однако это приближение вносит весьма малую погрешность из-за малой величины индукции поля тока в кольце по сравнению с полем, создаваемым током в катушке.

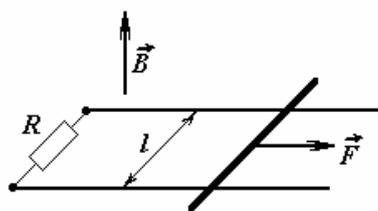
Заметим, что ни в коем случае нельзя пренебречь индуктивностью кольца - как бы не была она мала, именно она определяет дополнительный сдвиг фаз между током в кольце и индукцией поля. При сдвиге фаз равном π среднее значение силы Ампера равно нулю.

Задача для самостоятельного решения.

Пусть первоначально ток в катушке отсутствует, а затем катушку подключают к источнику постоянного напряжения, и через очень малый промежуток времени сила тока в катушке достигает постоянного значения I_0 . Пренебрегая трением и сопротивлением воздуха, определите, на какую высоту поднимется кольцо. (Все параметры задачи остались прежними).

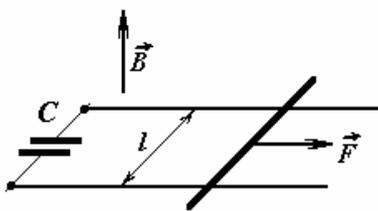
Задача 14. «Перемычка на рельсах»

1. На двух проводящих горизонтальных параллельных рельсах, находящихся на расстоянии l друг от друга, перпендикулярно рельсам расположена проводящая перемычка массы m , которая может скользить по рельсам без трения.

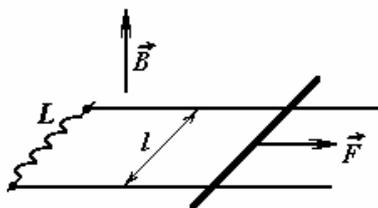


Вся система помещена в однородное вертикальное магнитное поле индукции B . Рельсы соединили с помощью резистора сопротивлением R , а к перемычке приложили постоянную горизонтально направленную силу F . Пренебрегая сопротивлением перемычки и рельсов и индуктивностью контура, найдите скорость установившегося движения перемычки.

2. В системе, описанной в п. 1, резистор заменили на конденсатор емкости C . Как будет двигаться перемычка в этом случае?



3. Замените в рассматриваемой системе конденсатор на катушку индуктивностью L и определите характер движения перемычки в этом случае.



4. В установке, описанной в п.1, перемычка покоится на некотором расстоянии x_0 от резистора. Внешняя сила не действует, первоначально магнитного поля нет, а затем достаточно быстро включают вертикальное однородное магнитное поле индукции B . Как изменится расстояние между перемычкой и резистором по прошествии большого промежутка времени.

Решение.

1. При движении перемычки площадь контура, образованного самой перемычкой, рельсами и резистором изменяется, следовательно, изменяется магнитный поток через этот контур, поэтому в контуре возникает эдс индукции, которая приводит к появлению электрического тока и на перемычку начинает действовать сила Ампера. Можно подробно не разбираться с направлениями эдс, тока и силы Ампера, так всегда действие магнитного поля таково, что оно препятствует каким либо изменениям в системе (в данном случае изменению магнитного потока и площади контура). Следовательно, сила Ампера направлена в сторону, противоположную скорости перемычки. Запишем эти рассуждения на языке формул физических

законов. Так как мы оговорили направление возникающей силы, все формулы будем записывать «по модулю».

ЭДС индукции (закон Фарадея):

$$\varepsilon = \frac{\Delta(Blx)}{\Delta t} = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} = Blv. \quad (1)$$

Сила тока (закон Ома):

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bl}{R} v. \quad (2)$$

Сила Ампера

$$F_A = IBl = \frac{B^2 l^2}{R} v. \quad (3)$$

Уравнение движения (закон Ньютона):

$$ma = F - F_A = F - \frac{B^2 l^2}{R} v. \quad (4)$$

По прошествии некоторого времени сила Ампера станет равной приложенной силе F , и в дальнейшем переключатель будет двигаться с постоянной скоростью \bar{v} , которую найдем из условия $a = 0$.

$$\bar{v} = \frac{FR}{B^2 l^2}. \quad (5)$$

Отметим, что в данном случае выполняется соотношение (что не трудно показать)

$$F\bar{v} = I^2 R, \quad (6)$$

которое соответствует закону сохранения энергии: мощность внешней силы равна мощности теплоты, выделяющейся на резисторе.

Таким образом, магнитное поле работает, его энергия не изменяется, оно способствует превращению энергии источника силы F в тепловую энергию. Такая ситуация типична, в случае проявления закона электромагнитной индукции. Магнитное поле и резистор действуют на переключатель как вязкая среда с силой пропорциональной скорости движения (это явление иногда называют «магнитной вязкостью»).

2. В данном случае движение с постоянной скоростью невозможно. Действительно, при постоянной скорости ЭДС индукции также постоянна, поэтому, когда конденсатор зарядится до напряжения, равного ЭДС индукции, ток прекратится, исчезнет тормозящая сила Ампера и переключатель начнет двигаться ускоренно.

Если пренебречь сопротивлением переключателя и рельсов, то напряжение на конденсаторе в любой момент времени равно ЭДС индукции

$$\varepsilon = \frac{q}{C}, \quad \text{или} \quad Blv = \frac{q}{C}. \quad (7)$$

Из этого соотношения выразим силу тока в контуре

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = CBl \frac{\Delta v}{\Delta t} = CBla, \quad (8)$$

которая оказывается пропорциональной ускорению (!) переключателя.

Уравнение движения по закону Ньютона имеет вид

$$ma = F - F_A = F - IBl = F - CB^2 l^2 a, \quad (9)$$

из которого следует, что перемычка будет двигаться с постоянным ускорением

$$a = \frac{F}{m + CB^2l^2}. \quad (10)$$

Обратите внимание, магнитное поле и конденсатор, как бы, увеличивают массу перемычки.

Закон сохранения энергии в данном случае имеет вид (его можно получить из записанных ранее уравнений, или, наоборот, использовать его в качестве исходного для решения задачи)

$$Fv\Delta t = \Delta\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right), \quad (11)$$

работа внешней силы равна изменению суммы кинетической энергии перемычки и энергии электрического поля конденсатора. Заметим, что и в данном случае электромагнитная индукция «работает» в качестве преобразователя энергии внешней силы в энергию конденсатора.

3. Если пренебречь сопротивлением активным контура, то ЭДС индукции, возникающая под действием внешнего магнитного поля, должна быть равна ЭДС самоиндукции катушки (и, естественно, направлена в противоположную сторону)

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = Blv = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (12)$$

Из этого соотношения находим силу тока

$$I = \frac{Bl}{L} x, \quad (13)$$

координата x отсчитывается от той точки, в которой сила тока в перемычке равна нулю. Как видите, в этом случае сила тока пропорциональна смещению перемычки. Закон движения перемычки имеет вид

$$ma = F - IBl = F - \frac{B^2l^2}{L} x, \quad (14)$$

который совпадает с уравнением гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}. \quad (15)$$

В данной ситуации магнитное поле и катушка индуктивности приводят к возникновению квазиупругой силы (действуют как пружина^{*}).

Для решения этой задачи также можно воспользоваться законом сохранения энергии в форме

^{*} Эту аналогию можно продолжить. Если катушка индуктивности действует как пружина жесткостью

$k^* = \frac{B^2l^2}{L}$, а конденсатор как дополнительная масса $m^* = CB^2l^2$, то соединенные вместе они

образуют пружинный маятник с периодом колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m^*}{k^*}} = 2\pi\sqrt{LC}$, что совпадает с известной формулой Томпсона.

$$Fv\Delta t = \Delta\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{LI^2}{2}\right). \quad (16)$$

4. Во всех предыдущих задачах изменение магнитного потока происходило вследствие изменения площади контура. В этой ситуации, возникновение сторонней силы можно связать с действием силы Лоренца на электроны в движущихся проводниках. Однако, магнитный поток может изменяться также из-за изменения индукции магнитного поля. В этом случае сторонней силой, приводящей к появлению ЭДС, является вихревое электрическое поле, возникающее при изменении магнитного поля.*

Так как поле включается быстро, то пренебрежем малым смещением переключки за время включения поля. Тогда сила тока в контуре во время включения поля определяется выражением

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{I}{R} \cdot \frac{\Delta(x_0 l B)}{\Delta t} = \frac{x_0 l}{R} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}, \quad (20)$$

а сила, действующая на переключку

$$F = IBl = \frac{x_0 l^2}{R} B \frac{\Delta B}{\Delta t}. \quad (21)$$

Воспользуемся вторым законом Ньютона в импульсной форме

$$m\Delta v = F\Delta t = \frac{x_0 l^2}{R} B\Delta B, \quad (22)$$

для определения скорости, которую приобретет переключка

$$v_0 = \frac{x_0 l^2 B^2}{2mR}. \quad (23)$$

При выводе последнего соотношения мы воспользовались начальными условиями (при $B = 0$ $v = 0$) и известным соотношением, справедливым при малых изменениях величин $B\Delta B = \Delta\left(\frac{B^2}{2}\right)$. Понятно, что скорость переключки будет направлена «внутрь» - магнитная индукция препятствует увеличению магнитного потока. Далее переключка будет двигаться в однородном магнитном поле, и на нее будет действовать сила «магнитной вязкости» (см. формулу (3))

$$ma = -\frac{B^2 l^2}{R} v. \quad (24)$$

Чтобы найти смещение переключки, преобразуем это уравнение следующим

образом $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta x} v$. После подстановки в (24) легко найдем

* Эти два проявления электромагнитной индукции неразрывно связаны между собой. В различных системах отсчета движение проводника может быть различным - поэтому объяснять электромагнитную индукцию можно как действием силы Лоренца, так и возникновением вихревого электрического поля. Если быть строгим, то всегда имеет смысл говорить только об едином электромагнитном поле, а не о полях магнитном и электрическом - в различных системах отсчета эти составляющие изменяются, однако ЭДС индукции от системы отсчета не зависит, как не зависит и суммарная сила, действующая на движущийся заряд в электромагнитном поле.

$$\Delta x = \frac{mR}{B^2 l^2} v_0 = \frac{x_0}{2}. \quad (25)$$

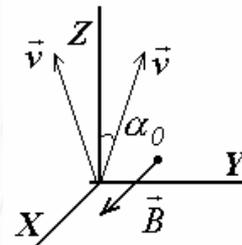
Поразительный результат - расстояние уменьшится в два раза, причем независимо от параметров задачи!

Задача 15. «Фокусировка»

В различных приборах для фокусировки заряженных частиц используется магнитное поле. В данной задаче изучаются условия фокусировки частиц.

1. Частица массы m влетает в магнитное поле индукции B со скоростью v , направленной под углом γ к вектору индукции поля. Покажите, что траектория частицы является цилиндрической спиралью, определите ее радиус R и шаг h .

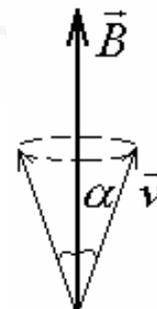
2. Пучок частиц массы m вылетает из узкой щели, расположенной в плоскости XU . Скорости всех частиц равны v и направлены в пределах плоского малого угла $2\alpha_0$, биссектриса которого перпендикулярна плоскости XU . Над плоскостью создано однородное магнитное поле индукции \vec{B} , направленное параллельно пластине. Считая, что



вектора скоростей всех частиц направлены перпендикулярно вектору индукции поля, покажите, что частицы будут фокусироваться на пластине. Определите положение и ширину полосы, в пределах которой частицы будут попадать на пластину.

3. Определите форму и размеры области попадания частиц на пластину в условиях, описанных в п.2, если вектора скоростей частиц направлены внутри конуса с углом полураствора α_0 .

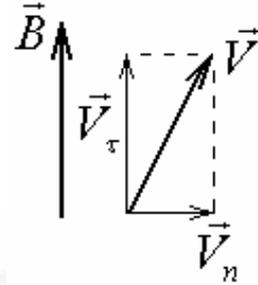
4. Пучок частиц массы m , влетает из одной точки в однородное магнитное поле индукции B , направленное вдоль оси Z . Скорости частиц равны v , а вектора скоростей частиц направлены внутри конуса с углом полураствора α_0 , ось которого совпадает с направлением вектора индукции поля. Найдите ширину пучка как функцию координаты z . Считая угол α_0 малым, найдите на каком расстоянии от источника частицы сфокусируются. Оцените ширину пучка в области фокуса.



Решение.

Первая часть задачи является очень известной и рассматривается во многих учебных пособиях, поэтому рассмотрим ее очень бегло, выделяя только наиболее существенные детали.

При движении заряженной частицы в магнитном поле на нее действует сила Лоренца, направленная перпендикулярно как вектору скорости \vec{v} , так и вектору магнитной индукции поля \vec{B} . Поэтому при описании движения заряженной частицы уместно разложить ее вектор скорости \vec{v} на две компоненты: тангенциальную $v_\tau = v \cos \gamma$, параллельную вектору



индукции и нормальную $v_n = v \sin \gamma$, перпендикулярную ему. При таком разложении модуль силы Лоренца определяется нормальной компонентой и равен $F_m = qBv_n$. Так как вектор этой силы перпендикулярен вектору индукции, то в процессе движения тангенциальная компонента скорости будет сохраняться. Будет также сохраняться и модуль нормальной компоненты, нормальная сила не изменяет модуля скорости. Иными словами движение частицы в однородном магнитном поле можно представить в виде суперпозиции двух простых движений - равномерного и прямолинейного вдоль линий вектора индукции и движения по окружности в плоскости перпендикулярной вектору индукции. Рассмотрим движение в этой плоскости.

Радиус окружности найдем из элементарных рассуждений: постоянная по модулю нормальная к вектору скорости сила создает центростремительное ускорение, поэтому

$$\frac{mv_n^2}{R} = qv_n B. \quad (1)$$

Из этого уравнения находим радиус окружности, по которой будет двигаться частица

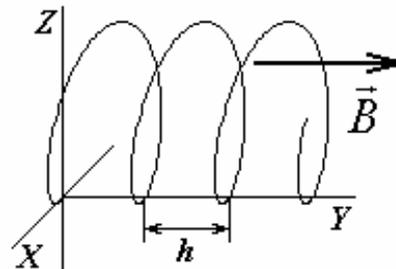
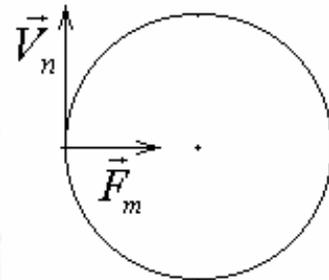
$$R = \frac{mv_n}{qB}, \quad (2)$$

а затем период обращения

$$T = \frac{2\pi R}{v_n} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (3)$$

Отметим, что время одного оборота и угловая скорость не зависят от скорости частицы. За время одного оборота частица сместится вдоль вектора индукции поля на величину

$$h = v_\tau T = \frac{2\pi m}{qB} v_\tau, \quad (4)$$

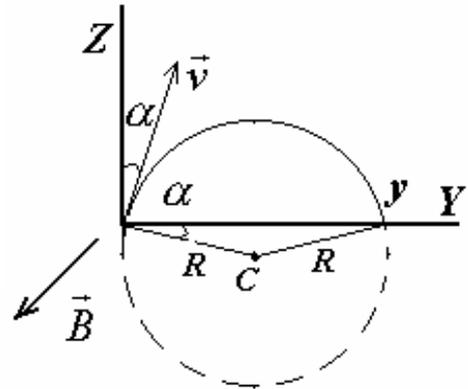


которое и будет равняться шагу спирали (если «объединить» два вида движения).

2. В данном случае все частицы будут двигаться в плоскости ZY по дугам окружностей одинакового радиуса, определяемого по формуле (2)

$$R = \frac{mv}{qB},$$

не зависящим от угла вылета частицы. Однако положение центра этой окружности зависит от угла вылета. (Для его определения необходимо провести отрезок перпендикулярный вектору начальной скорости и равный радиусу окружности. Как видно из рисунка, частица достигнет плоскости в точке с координатой

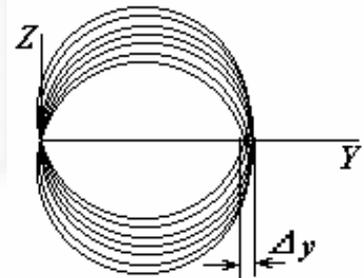


$$y = 2R \cos \alpha. \quad (5)$$

Обратите внимание - координата точки падения не зависит от знака угла, поэтому максимальное смещение вдоль оси Y будут иметь те частицы, которые вылетают из источника перпендикулярно плоскости¹. Рассчитаем также время движения частицы, которое нам понадобится в дальнейшем. До попадания на плоскость частица повернется на угол $(\pi - 2\alpha)$. Поэтому время движения рассчитывается по формуле

$$\tau = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi} T = \frac{m}{qB} (\pi - 2\alpha). \quad (6)$$

Если угол α изменяется в небольших пределах, то координата точки падения будет изменяться мало. При малых α справедлива приближенная формула $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Поэтому ширина полосы, в пределах которой частицы попадают на плоскость, определяется формулой



$$\Delta y = R\alpha^2 = \frac{mv}{qB} \alpha_0^2, \quad (7)$$

а ее край расположен на расстоянии $2R$ от источника.

На рисунке показаны несколько траекторий частиц, вылетающих под разными углами к плоскости. Эффект фокусировки в данном случае математически проявляется в том, что изменение координаты квадратично зависит от малого угла вылета, поэтому является малой величиной второго порядка. Однако, как следует из формулы (6), различие во временах движения является малой величиной, того же порядка малости, что и угол α_0 .

¹ Этот вывод напоминает движение в поле тяжести: одной и той же дальности полета могут соответствовать два угла вылета: больший и меньший 45° , а максимальная дальность достигается при единственном значении угла вылета.

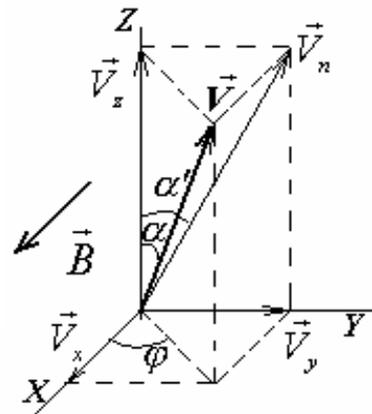
3. Рассмотрим движение частицы, направление вектора начальной скорости которой \vec{v} определяется двумя углами:

α - угол между вектором скорости и осью Z (этот угол изменяется от 0 до предельного значения α_0 и является малым);

φ - угол между осью X и проекцией вектора скорости на плоскость XY .

Разложим вектор скорости на составляющие вдоль осей координат.

$$\begin{aligned} v_x &= v \sin \alpha \cos \varphi \\ v_y &= v \sin \alpha \sin \varphi . \\ v_z &= v \cos \alpha \end{aligned} \quad (8)$$



Проекция вектора скорости на плоскость YZ является нормальной компонентой вектора \vec{v}_n по отношению к вектору индукции поля (кроме того, она является суммой компонент \vec{v}_y и \vec{v}_z). Обозначим угол между нормальной компонентой вектора скорости \vec{v}_n и осью Z через α' . Наличие компоненты скорости вдоль направления вектора индукции \vec{v}_x приведет к равномерному смещению вдоль оси X , которое наложится на уже рассмотренное движение в плоскости YZ .

Так смещение частицы вдоль оси Y за время полета определяется формулой (5), в которой угол α следует заменить на α' . То есть в момент падения на плоскость XY

$$y = 2 \frac{mv_n}{qB} \cos \alpha' = 2 \frac{mv_z}{qB} = 2 \frac{mv}{qB} \cos \alpha \approx 2 \frac{mv}{qB} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right). \quad (9)$$

При выводе этой формулы учтено, что $v_n \cos \alpha' = v_z$. Интересно отметить, что координата y не зависит от угла φ - то есть все частицы, вылетевшие под одним углом α к оси Z в момент падения «выстроятся» на плоскости XY на одну прямую.

Смещение вдоль оси X рассчитаем по формуле $x = v_x \tau$, где время движения τ можно найти по формуле (6) с очевидной заменой α на α' .

Последний определяется соотношением $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v_y}{v_z} = \sin \varphi \operatorname{tg} \alpha$. Или

$\alpha' = \operatorname{arctg}(\sin \varphi \operatorname{tg} \alpha)$, при малых углах эту формулу можно заменить приближенной

$$\alpha' \approx \alpha \sin \varphi . \quad (10)$$

В момент попадания на плоскость координата x вычисляется по формуле

$$x = v \sin \alpha \cos \varphi \frac{m}{qB} (\pi - 2\alpha \sin \varphi) \approx \alpha \frac{\pi m v}{qB} \cos \varphi. \quad (11)$$

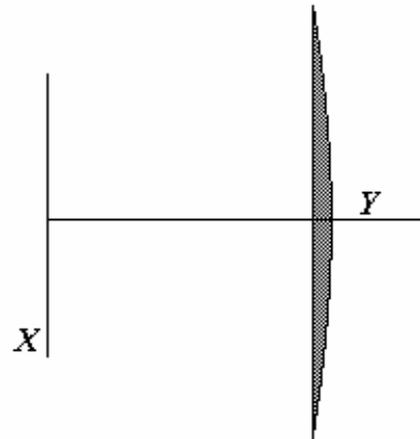
На последнем шаге преобразований мы пренебрегли вторым слагаемым, имеющим второй порядок малости по углу α . Таким образом, при фиксированном значении угла α координата x будет изменяться в пределах от $+\alpha \frac{\pi m v}{qB}$ до $-\alpha \frac{\pi m v}{qB}$ при изменении φ в пределах полного угла. Формулы

(9),(11) и определяют границы области попадания частиц на плоскости XU . Выразим из формулы (11) величину α как функцию предельного значения x и подставим в формулу (9):

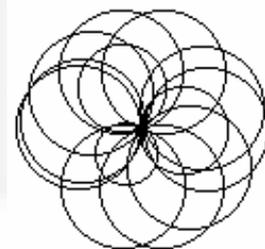
$$\alpha = \frac{qB}{\pi m v} x; \quad (12)$$

$$y = 2 \frac{m v}{qB} - x^2 \frac{qB}{\pi^2 m v}.$$

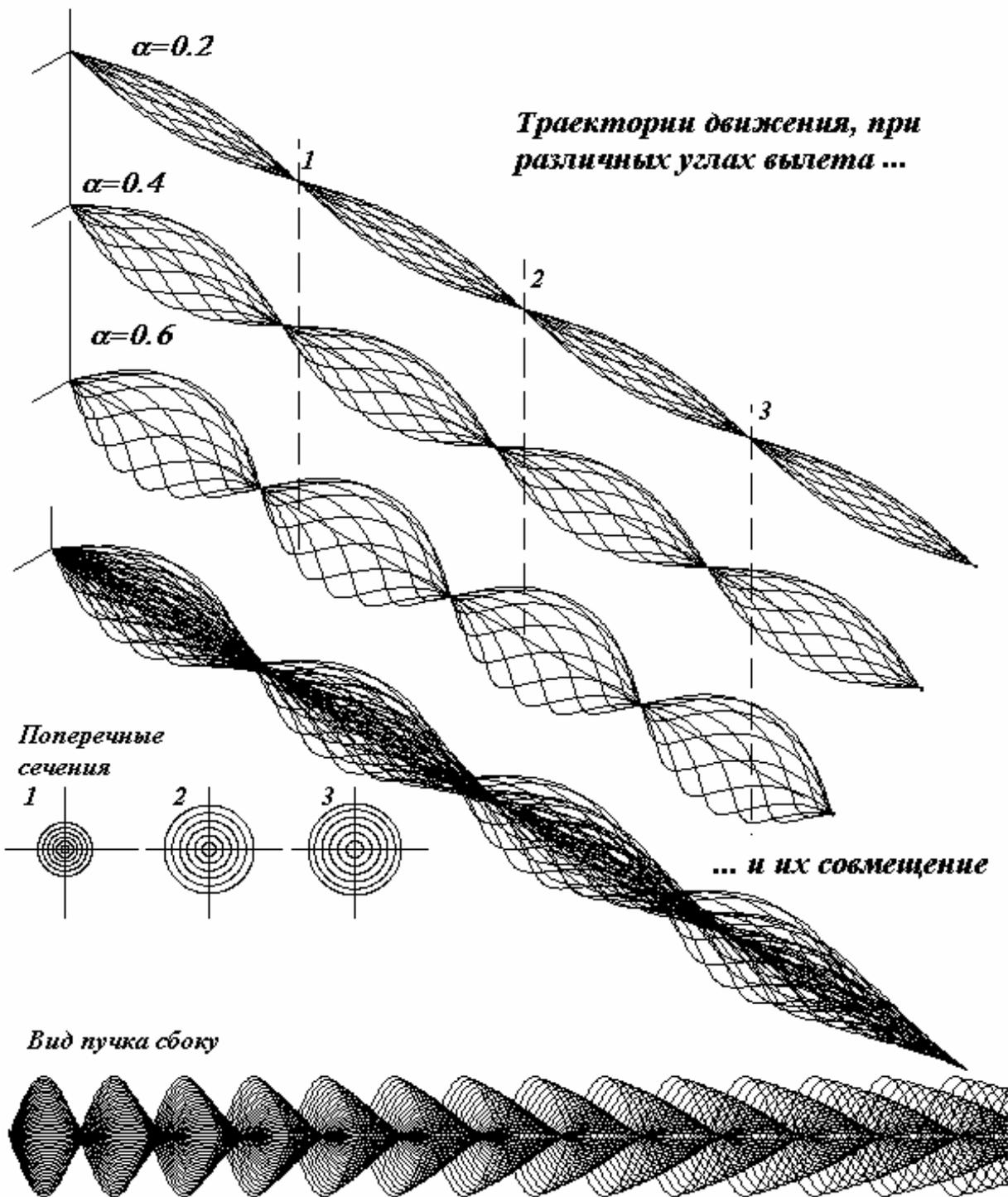
Функция (12) явно определяет границу области попадания частиц. Отметим, что изменение координаты y имеет второй порядок малости по углу α_0 (фокусировка), а отклонение в перпендикулярном направлении пропорционально этому предельному углу.



4. Воспользуемся результатами п.1. Движение каждой частицы будет происходить по спирали, радиус которой зависит от угла вылета частицы. Причем все спирали не будут соосны, а будут касаться одной прямой - оси пучка. Если спроецировать движение всех частиц на плоскость перпендикулярную оси пучка (и вектору индукции поля), то все частицы будут двигаться по окружностям различного радиуса, проходящим через одну точку - источник частиц. Так как период обращения частицы в магнитном поле не зависит от ее скорости, движение частиц по этим окружностям будет «согласованным», они будут возвращаться к оси пучка одновременно. В трехмерном пространстве семейство траекторий частиц будет представлять собой набор цилиндрических спиралей, касающихся оси пучка своими боковыми сторонами. Если угол вылета частиц к вектору магнитной индукции мал, то проекции скорости v_{τ} будут изменяться крайне мало, поэтому все траектории-спирали будут иметь приблизительно одинаковый шаг, следовательно на расстоянии шага спирали будет наблюдаться эффект фокусировки частиц.



На рисунке продемонстрирован графически данный эффект. Для наглядности предельный угол вылета сильно преувеличен.



Рассмотрим группу частиц вылетевших под одинаковыми углами α к оси пучка. За некоторый промежуток времени t они пройдут дугу окружности

$\varphi = \frac{2\pi}{T}t$, радиуса $R = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv}{qB} \sin \alpha$. Тем самым удалятся на расстояние

$r = 2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|$ (что и будет являться радиусом пучка этих частиц) от оси пучка

и сместятся на расстояние $x = v_z t = vt \cos \alpha$ вдоль этой оси. Выражая t как функцию x и подставляя в формулу для r , получим зависимость радиуса пучка от координаты x :

$$t = \frac{x}{v \cos \alpha}; \quad r = 2 \frac{mv}{qB} \sin \alpha \cdot \left| \sin \left(\frac{\pi}{T} \cdot \frac{x}{v \cos \alpha} \right) \right| = 2 \frac{mv}{qB} \sin \alpha \cdot \left| \sin \left(\frac{qB}{2mv \cos \alpha} x \right) \right|. \quad (13)$$

Теперь необходимо учесть, что частицы вылетают под различными углами, изменяющимися в пределах от 0 до α_0 . Поэтому, строго говоря, для определения радиуса всего пучка необходимо для каждого значения x найти максимальное значение функции (13) при изменении угла вылета в указанных пределах. Однако, учитывая малость этих углов, мы можем положить $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, тогда ширина пучка будет определяться частицами, вылетевшими под максимальным углом, то есть искомая функция зависимости радиуса пучка от координаты x имеет вид

$$r = 2 \frac{mv}{qB} \alpha_0 \cdot \left| \sin \left(\frac{qB}{2mv} x \right) \right|. \quad (14)$$

Следовательно, частицы будут фокусироваться на расстояниях x_k , удовлетворяющих условию

$$\frac{qB}{2mv} x_k = \pi k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \text{ или } x_k = \frac{\pi qB}{2mv} k. \quad (15)$$

Заметим, что наилучшая фокусировка будет наблюдаться для малых значений k .

Для определения ширины пучка в области фокуса необходимо учесть зависимость продольной компоненты скорости от угла вылета (вспомнить, что косинус малого угла все-таки меньше 1). Найдем ширину пучка в области фокуса. Для этого преобразуем выражение (13)

$$r = 2 \frac{mv}{qB} \sin \alpha \cdot \left| \sin \left(\frac{qB}{2mv \cos \alpha} x_k \right) \right| \approx 2 \frac{mv}{qB} \alpha \left| \sin \frac{k\pi}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} \right| \approx \approx 2 \frac{mv}{qB} \alpha \left| \sin k\pi \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \right| \approx \frac{\pi mv}{qB} k \alpha^3. \quad (15)$$

Максимальное значение этой функции соответствует максимальному углу вылета, поэтому ширина пучка в области k -того фокуса определяется формулой

$$r \approx \frac{\pi mv}{qB} k \alpha_0^3. \quad (16)$$

Как следует из этого выражения, ширина пучка имеет третий (!) порядок малости, но линейно возрастает с номером фокуса.

Задача 16.

Опишите прохождение световых лучей через центрированную оптическую систему состоящую из сферических преломляющих поверхностей, центры которых лежат на одной прямой, которая называется оптической осью системы. Заметим, что таким системам относятся телескопы, микроскопы, фотоаппараты, диапроекторы, глаза человека и т.д. Такие системы обладают осевой симметрией, поэтому достаточно рассмотреть ход лучей в одной плоскости, содержащей оптическую ось.

Пусть (см. рис.1) OO_1 - оптическая ось системы, проведем произвольную плоскость P , перпендикулярную оси. Произвольный луч AB , пересекающий плоскость P однозначно определяется двумя параметрами: x - расстоянием от оптической оси до точки пересечения луча и плоскости, α - углом между направлением луча и оптической осью (договоримся отсчитывать этот угол в направлении «против хода часовой стрелки»).

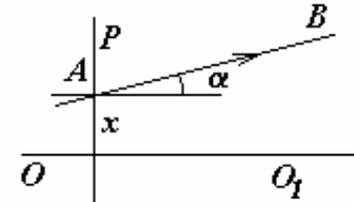


Рис.1

Очевидно, что параметры луча (x, α) могут быть как положительными так и отрицательными. Кроме того, будем полагать их малыми настолько, что везде, где это необходимо, будем считать синус и тангенс угла α равным величине самого угла, естественно, измеренному в радианах. Такое приближение называется параксиальным (близким к оси). В данном приближении в любой центрированной системе связь между параметрами одного и того же луча в разных плоскостях линейна, сколько бы преломляющих поверхностей не находилось между ними. Рассмотрите изменение этих параметров, когда луч проходит через следующие простые элементы оптической системы.

1. Участок пустого пространства. Пусть между двумя плоскостями P_0 (входной) и P_1 (выходной), находящихся на расстоянии d друг от друга, преломляющих поверхностей нет (рис.2). Установите связь между выходными (x_1, α_1) и входными (x_0, α_0) параметрами луча.

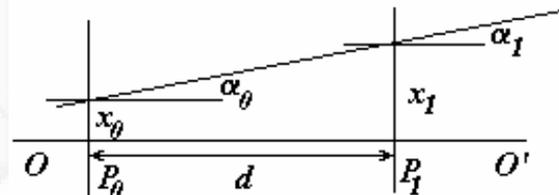


Рис.2

2 Сферическая преломляющая поверхность. Луч преломляется на сферической поверхности радиуса R , за которой находится среда с относительным (второй среды относительно первой) показателем преломления n . Установите связь между выходными (x_1, α_1) и входными (x_0, α_0) параметрами луча.

3. Тонкая линза. Линза представляет собой две сферические поверхности, она считается «тонкой», если можно пренебречь горизонтальным смещением луча в самой линзе, иными словами, если ее толщина значительно меньше радиусов кривизны ее поверхностей. Покажите, что связь между выходными

(x_1, α_1) и входными (x_0, α_0) параметрами луча, прошедшего через тонкую линзу, с радиусами кривизны поверхностей R_1, R_2 и показателем преломления n , выражается формулами

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ \alpha_1 = -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot x_0 + \alpha_0 \end{cases}$$

4. Используя результаты п. 3, получите формулу для фокусного расстояния F тонкой линзы.

5. Получите «формулу тонкой линзы», связывающую расстояние от предмета до линзы a с расстоянием от линзы до изображения b :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

6. Рассмотрите оптическую систему состоящую из двух сферических зеркал, повернутых навстречу друг другу (рис. 3). Обозначим радиусы кривизны одного зеркала R_1 (его центр точка O_1); другого - R_2 (центр - O_2); расстояния между зеркалами - d . Цель исследования - выяснить при каких параметрах системы произвольный световой луч AB не будет покидать данную оптическую систему.

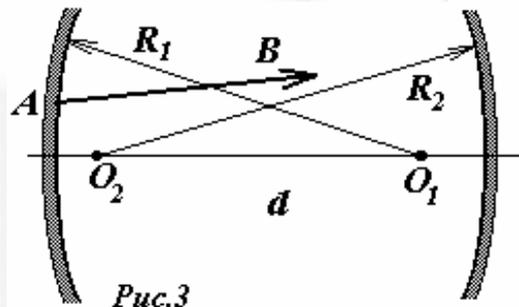


Рис.3

Рассматриваемая нами система является оптическим резонатором, повсеместно используемым в оптических квантовых генераторах (лазерах). Если для него выполняется условие задачи, то такой резонатор называется устойчивым, в противном случае неустойчивым.

Заменим систему зеркал на бесконечную цепочку линз (рис.4), фокусные расстояния которых равны фокусным расстояниям зеркал, которые, в свою очередь, известны

$$F_1 = \frac{R_1}{2}; \quad F_2 = \frac{R_2}{2}.$$

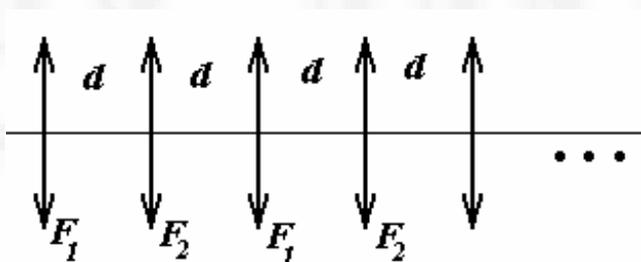


Рис. 4

Понятно, что такая система полностью эквивалентна резонатору.

6.1 Используя линейные преобразования, полученные ранее, запишите формулы преобразований для произвольного луча за полный проход резонатора. Выразите формулы этих преобразований через безразмерные

параметры, определяющие геометрию оптической системы $\xi_1 = 1 - \frac{d}{R_1}$,

$$\xi_2 = 1 - \frac{d}{R_2}.$$

6.2 В некоторых случаях явные выражения для параметров луча могут быть представлены в виде $x_n = A\gamma^n; y_n = B\gamma^n$, где γ - некоторая постоянная. Выразите возможные значения этого параметра параметры системы ξ_1, ξ_2 .

При каком соотношении между параметрами ξ_1, ξ_2 , резонатор будет устойчивым? Изобразите область устойчивости на диаграмме (ξ_1, ξ_2) .

Решение.

1. Связь между выходными (x_1, α_1) и входными (x_0, α_0) параметрами луча выражается очевидными формулами (см. рис.1)

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha_0 d \\ \alpha_1 = \alpha_0 \end{cases}, \quad (1)$$

где учтена малость угла α , поэтому, как было сказано ранее $tg\alpha \approx \alpha$.

2. Сферическая преломляющая поверхность.

Пусть луч AB (рис.5) преломляется на сферической поверхности Ω радиуса R (а центр кривизны точка C), за которой находится среда с относительным (второй среды относительно

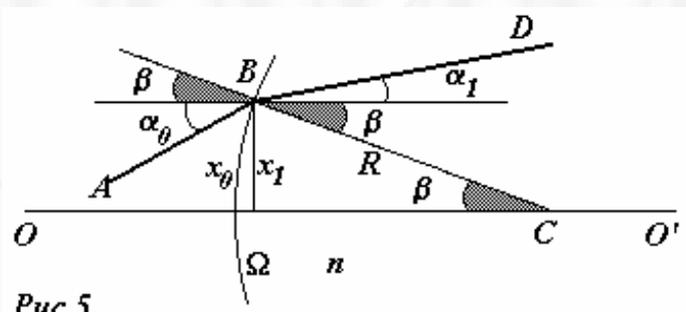


Рис.5

первой) показателем преломления n . Преломленный луч - BD . Так как параметры x малы, можно считать, что смещение точки пересечения луча с поверхностью в вертикальном направлении, не смещает ее в горизонтальном направлении. Совместим входную и выходную плоскости (на рисунке не показаны), тогда, очевидно $x_1 = x_0$. Проведем радиус поверхности в точку пересечения луча, этот отрезок CB является нормалью к поверхности. Закон преломления можно записать в виде

$$\sin(\alpha_0 + \beta) = n \sin(\alpha_1 + \beta),$$

учитывая малость всех углов, получим $\alpha_0 + \beta \approx n(\alpha_1 + \beta)$, кроме того, можно

заметить, что $\beta = \frac{x_0}{R}$. Из этих соотношений без труда можно найти угол α_1 .

Запишем окончательные формулы преобразования параметров луча при переходе через сферическую преломляющую поверхность

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ \alpha_1 = -\frac{n-1}{nR}x_0 + \frac{1}{n}\alpha_0 \end{cases} \quad (2)$$

Покажите самостоятельно, что если преломляющая поверхность повернута в другую сторону (ее центр находится слева), то в формулах преобразования необходимо считать радиус кривизны поверхности отрицательным.

3. Тонкая линза представляет собой две сферические поверхности, причем ее толщина значительно меньше радиусов ее поверхностей.

Для того, чтобы описать ход луча через такую систему (рис.6) необходимо дважды рассмотреть его преломление - на передней и задней сферических поверхностях. Введем три плоскости, в которых будем рассматривать параметры луча: входную, непосредственно перед линзой - P_0 ; промежуточную, внутри линзы - P_1 ; выходную, сразу за линзой - P_2 . (Так линза

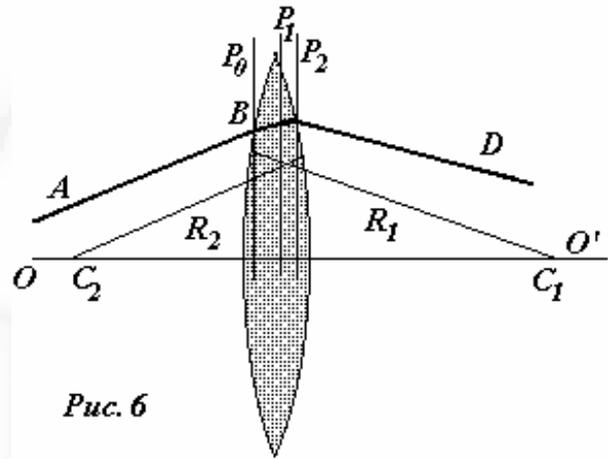


Рис. 6

тонкая, то все эти плоскости совпадают). Формулы преобразования параметров луча при переходе через сферическую поверхность нами получены, воспользуемся ими. Пусть входные параметры луча (x_0, α_0) , тогда в промежуточной плоскости P_1 параметры луча (x_1, α_1) определяются формулами (2), в которых следует положить $R = R_1$ радиусу первой преломляющей поверхности :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ \alpha_1 = -\frac{n-1}{nR_1}x_0 + \frac{1}{n}\alpha_0 \end{cases} \quad (3)$$

«Переход» через вторую поверхность описывается теми же формулами, в которых надо считать $R = -R_2$ (так как центр кривизны с другой стороны) и

заменить n на $\frac{1}{n}$, так как в этом случае луч выходит из линзы:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ \alpha_2 = -\frac{n-1}{R_2}x_1 + n\alpha_1 \end{cases} \quad (4)$$

Осталось подставить выражения (3) для промежуточных параметров, чтобы получить окончательные выражения для формул преобразования параметров луча в тонкой линзе

$$\begin{cases} x_2 = x_0 \\ \alpha_2 = -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot x_0 + \alpha_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_0 \\ \alpha_2 = -\frac{x_0}{F} + \alpha_0 \end{cases} \quad (5)$$

Коэффициент при x_0 во второй формуле обозначим $-\frac{1}{F}$, где F - некоторая характеристика линзы, имеющая размерность длины.

4. Пусть на тонкую линзу падает пучок лучей, параллельных оптической оси линзы (см. рис.7, который здесь уже и не нужен - все «нарисовано» в формулах преобразований).

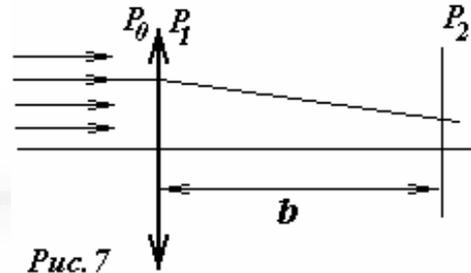


Рис. 7

Расположим входную плоскость непосредственно перед линзой, здесь $\alpha_0 = 0$ а x_0 изменяется от луча к лучу (можно сказать, что эта пара параметров, один из которых постоянен, а второй варьируется, описывает пучек лучей). На выходе из линзы параметры лучей находим по формулам (5),

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ \alpha_1 = -\frac{x_0}{F} \end{cases} \quad (6)$$

Найдем параметры пучка на некотором расстоянии b за линзой с помощью формул преобразования (1)

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \alpha_1 b \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_0 \left(1 - \frac{b}{F}\right) \\ \alpha_2 = -\frac{1}{F} x_0 \end{cases}$$

Если положить $b = F$, то при любом значении x_0 выходной параметр $x_2 = 0$. Это и означает, что все лучи пересекутся в одной точке на оптической оси на расстоянии F от линзы. Иными словами, мы доказали, что введенная величина F является фокусным расстоянием линзы.

Покажите самостоятельно, что пучек параллельных лучей, падающий на линзу под некоторым углом α_0 , после преломления в линзе также сойдется в одной точке, которая находится на расстоянии F от линзы.

5. Выведем «формулу линзы». Пусть точечный источник находится на оптической оси тонкой линзы расстоянии a от нее. Пучок расходящихся от источника лучей имеет параметры-

изначально $x_0 = 0$, угол α_0 - произвольный;
на входе в линзу (применяем преобразования (1))

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_0 a \\ \alpha_1 = \alpha_0 \end{cases};$$

на выходе из линзы (преобразование (5)) :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ \alpha_2 = -\frac{x_1}{F} + \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \alpha_0 a \\ \alpha_2 = \alpha_0 \left(1 - \frac{a}{F}\right) \end{cases};$$

на расстоянии b от линзы :

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + \alpha_2 b \\ \alpha_3 = \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \alpha_0 \left(a + b - \frac{ab}{F}\right) \\ \alpha_3 = \alpha_0 \left(1 - \frac{a}{F}\right) \end{cases}. \quad (7)$$

Видно, что при выполнении условия

$$a + b = \frac{ab}{F} \quad (8)$$

параметр x_3 обращается в нуль при любом значении α_0 . То есть все лучи исходного пучка собираются на оптической оси на расстоянии b , удовлетворяющем уравнению, которое непосредственно следует из выражения (8),

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (9)$$

Как видите, рассматриваемая методика легко и просто приводит к известной формуле линзы, при чем ее вывод сводится к трем линейным подстановкам.

Таким же образом можно рассчитать ход луча и в толстой линзе. Если в системе линз больше одной, то принципиально ничего не изменяется: задайте параметры исходного луча, затем их преобразовывайте: пустой участок - по формулам (1), сферическая поверхность - по формулам (2); тонкая линза - по формулам (5).

6.1 Будем рассматривать лучи, идущие на небольшом расстоянии x от оптической оси и под малыми углами α к ней, так чтобы можно было пользоваться параксиальным приближением. Запишем формулы преобразования параметров луча, при его прохождении через «один период» нашей бесконечной цепочки (рис.8). Пусть после первой линзы параметры луча (x_0, α_0) , затем эти параметры будут преобразовываться по уже известным формулам

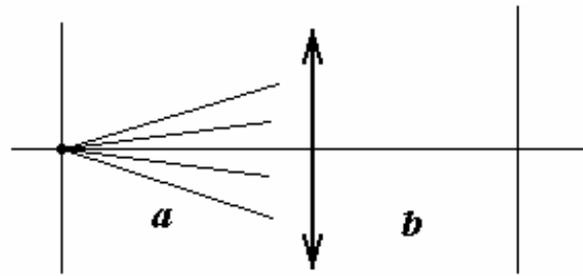
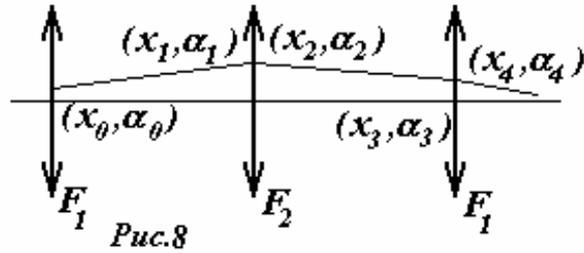


Рис. 7

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha_0 d \\ \alpha_1 = \alpha_0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ \alpha_2 = -\frac{x_1}{F_2} + \alpha_1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + \alpha_2 d \\ \alpha_3 = \alpha_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_4 = x_3 \\ \alpha_4 = -\frac{x_3}{F_1} + \alpha_3 \end{cases}$$



Проводя последовательные подстановки, выразим (x_4, α_4) непосредственно через (x_0, α_0)

$$\begin{cases} x_4 = x_0 \left(1 - \frac{2d}{R_2}\right) + \alpha_0 \left(2d - \frac{2d^2}{R_2}\right) \\ \alpha_4 = x_0 \left(\frac{4d}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2}\right) + \alpha_0 \left(1 + \frac{4d^2}{R_1 R_2} - \frac{2d}{R_1} - \frac{4d}{R_2}\right) \end{cases} \quad (10)$$

При использовании безразмерных параметров $\xi_1 = 1 - \frac{d}{R_1}$, $\xi_2 = 1 - \frac{d}{R_2}$

рекуррентные соотношения (10) принимают вид

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} \cdot (2\xi_2 - 1) + \alpha_{n-1} \cdot 2\xi_2 \\ \alpha_n = x_{n-1} \cdot (4\xi_1 \xi_2 - 2\xi_1 - 2\xi_2) + \alpha_{n-1} \cdot (4\xi_1 \xi_2 - 2\xi_2 - 1) \end{cases}, \quad (11)$$

где переобозначено (x_n, α_n) - параметры луча, после n полных проходов через резонатор.

6.2 Пусть последовательность пар чисел (x_n, α_n) задается своими начальными значениями (x_0, α_0) и линейными соотношениями

$$\begin{cases} x_n = ax_{n-1} + b\alpha_{n-1} \\ \alpha_n = cx_{n-1} + g\alpha_{n-1} \end{cases}, \quad (12)$$

где a, b, c, g - постоянные коэффициенты. Эти зависимости являются своеобразным обобщением геометрической прогрессии, которая может быть определена соотношением $x_n = ax_{n-1}$, из которого следует $x_n = x_0 a^n$. Попробуем и в «двумерном случае» (12) найти явные выражения в виде

$$x_n = A\gamma^n; \alpha_n = B\gamma^n. \quad (13)$$

После подстановки этих выражений в (12) и сокращений получим

$$\begin{cases} A\gamma = aA + bB \\ B\gamma = cA + gB \end{cases}, \text{ а после перестановки } \begin{cases} A(\gamma - a) = bB \\ cA = (\gamma - g)B \end{cases}. \quad (14)$$

Эта пара уравнений может иметь отличные от нуля значения параметров A, B только при условии пропорциональности коэффициентов

$$\frac{\gamma - a}{c} = \frac{b}{\gamma - g}. \quad (15)$$

Как видите, решение в виде (13) может существовать только для тех значений γ , которые удовлетворяют квадратному уравнению (15).

Преобразуем его к стандартному виду

$$\gamma^2 - \gamma(a + g) + (ag - bc) = 0. \quad (16)$$

Обозначим корни этого уравнения γ_1, γ_2 , тогда

$$\gamma_{1,2} = \frac{a + g}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a + g}{2}\right)^2 - (ag - bc)} = 2\xi_1\xi_2 - 1 \pm \sqrt{(2\xi_1\xi_2 - 1)^2 - 1}. \quad (17)$$

Явные выражения для последовательности (12) будут иметь вид (с учетом связи между коэффициентами (14))

$$\begin{cases} x_n = A_1\gamma_1^n + A_2\gamma_2^n \\ y_n = A_1\frac{\gamma_1 - a}{b}\gamma_1^n + A_2\frac{\gamma_2 - a}{b}\gamma_2^n \end{cases}. \quad (18)$$

При записи последних соотношений учтено, рекуррентные соотношения являются линейными, поэтому сумма двух решений, соответствующих разным значениям γ , также является решением. Неопределенные пока значения коэффициентов A_1, A_2 находятся из начальных значений последовательности. Таким образом, находится явный вид зависимости членов последовательности. Очевидно, что для того чтобы значения (x_n, y_n) не возрастали до бесконечности необходимо, чтобы оба корня уравнения (16) по модулю не превосходили единицы $|\gamma_1|, |\gamma_2| \leq 1$.

Применим полученные формулы к рассматриваемому нами резонатору. Элементарные преобразования показывают, что для системы (11) свободный член квадратного уравнения (16) $ab - cg = 1$. Тогда, согласно теореме Виета, произведение его корней $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$, следовательно, если один из корней меньше единицы, то второй ее превышает. Таким образом, для нашей системы не существует устойчивых решений в форме (13)!

Поэтому условие устойчивости резонатора - когда уравнение (16) не имеет вещественных корней - когда его дискриминант отрицателен. Опуская алгебраические выкладки запишем это условие

$$\boxed{0 < \xi_1\xi_2 < 1}. \quad (19)$$

Согласитесь, метод нашего решения весьма странный - фактически, мы записали условия, когда мы не знаем решения. Тем не менее, неравенства

(11) действительно определяют условия устойчивости оптического сферического резонатора.

Простота этих неравенств оправдывает введение безразмерных параметров (ξ_1, ξ_2) . Изобразим также графически область устойчивости - на рис.4 она заштрихована.

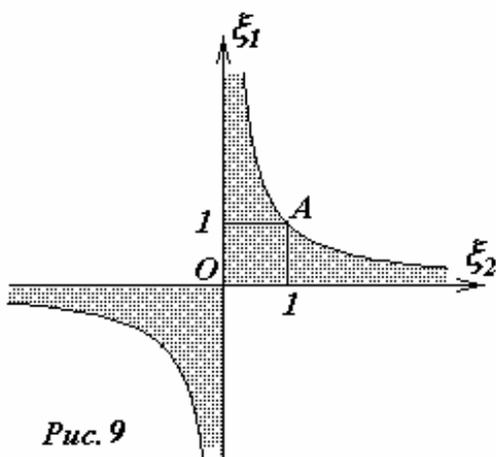


Рис. 9

Отметим, что резонатор с плоскими зеркалами ($\xi_1 = \xi_2 = 1$), или даже с одним плоским зеркалом находится на границе устойчивости и является неустойчивым. Также неустойчив резонатор, у которого $R_1 = R_2 = d$ ($\xi_1 = \xi_2 = 0$). Но существуют устойчивые резонаторы, одно из зеркал которых является рассеивающим - найдите соответствующие точки на диаграмме устойчивости.

соответствующие точки на диаграмме устойчивости.

Задача 17.

«Объясняя» возникновение радуги, авторы учебных пособий весьма часто ограничиваются указанием на то, что это замечательное природное явление демонстрирует явление дисперсии света. Иногда приводят типичный рисунок двойного преломления луча света в сферической капле воды (рис. 1), позаимствованный еще из работы Р.Декарта. Приведенные утверждения справедливы: действительно изображение радуги формируют солнечные лучи дважды преломившиеся на поверхности капли (и конечно, один раз отразившиеся от ее внутренней поверхности); действительно показатель преломления воды зависит от длины волны падающего света, поэтому углы выхода лучей из капли различны для различных длин волн. Однако объяснение и описание радуги не столь просто, как это кажется на первый взгляд, хотя эффекты данного явления вполне объяснимы в рамках геометрической оптики.

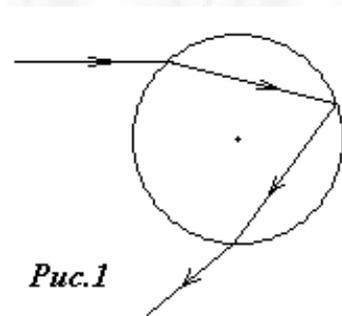


Рис.1

Рассмотрим прохождение лучей через сферическую каплю.

Назовем оптической осью прямую O_1O_2 , проходящую через центр капли и параллельную падающему лучу S_0 . Обозначим:

S_1 - луч, сразу отразившийся от поверхности капли;

S_2 - луч, испытавший два преломления на поверхности капли;

S_3 - луч, испытавший два преломления и одно отражение внутри капли;

S_4 - луч, испытавший два преломления и два отражения внутри капли.

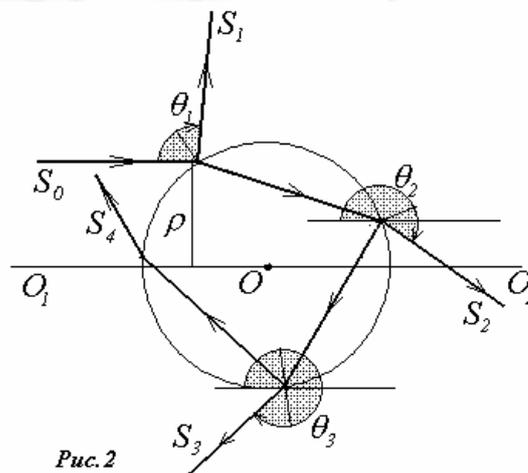


Рис. 2

Углы, под которыми лучи отходят от капли $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, будем отсчитывать от оптической оси. Назовем прицельным параметром ρ отношение расстояния между падающим лучом и оптической осью к радиусу капли. (Для лучей, падающих на каплю, этот параметр изменяется от -1 до $+1$).

1. Найдите зависимости углов, под которыми лучи отходят от капли $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, от прицельного параметра ρ .

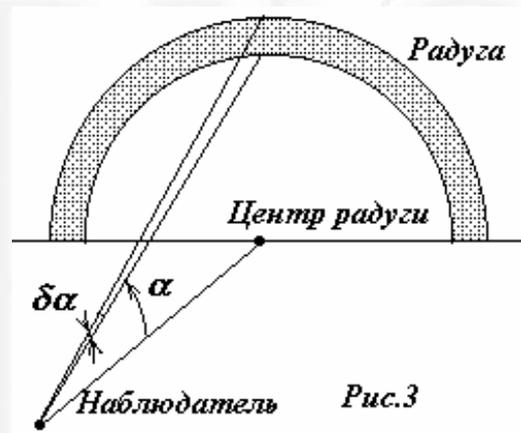
2. Покажите, что зависимости углов θ_1, θ_2 от прицельного параметра ρ являются монотонными. Покажите, что для лучей S_3, S_4 существуют минимальные значения углов отклонения θ_3, θ_4 . Найдите значения этих минимальных углов.

3. Покажите, что лучи, вышедшие из различных капель под одинаковыми углами к оптической оси, расположенных в разных точках пространства, дают изображение на сетчатке глаза в виде дуги окружности. Постройте ход этих лучей в глазу человека.

4. Покажите, что минимальным углом отклонения соответствует яркая граница, которая определяет угловой размер радуги.

5. Вычислите угловой наблюдаемый размер α основной и вторичной радуги. (На рис.3 показана только одна из них)

6. Вычислите угловую ширину $\delta\alpha$ каждой дуги радуги.



Значения показателя преломления воды, для различных длин волн.

Длина волны (нм), цвет	759,0 (красный)	589,8 (желтый)	486,0 (голубой)	397,0 (фиолетовый)
Показатель преломления	1,329	1,333	1,337	1,344

Решение.

1.

Используя рис.4 и законы отражения и преломления света, легко получить

$$\theta_0 = \arcsin \rho, \quad \beta = \arcsin\left(\frac{t}{r}\right)$$

(1)

Тогда искомые углы вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 2\theta_0; \\ \theta_2 &= 2\theta_0 + \alpha; \\ \theta_3 &= 2\theta_0 + 2\alpha; \\ \theta_4 &= 2\theta_0 + 3\alpha; \end{aligned}$$

(2)

которые можно записать в общем виде

$$\theta_k = 2\theta_0 + (k-1)\alpha =$$

$$= 2\arcsin \rho + 2(k-1)\pi - 2(k-1)\arcsin\left(\frac{\rho}{n}\right) \quad (3)$$

2. Вычислим производную от функции (3)

$$\theta'_k = \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{2(k-1)}{\sqrt{n^2-\rho^2}} \quad (4)$$

и приравняем ее к нулю. Тем самым получим уравнение для определения значения ρ , при котором эта функция достигает экстремума -

$$n^2 - \rho^2 = (k-1)^2(1-\rho^2), \quad (5)$$

При $k-1 > 2$ уравнение (5) имеет корни

$$\rho^* = \pm \sqrt{\frac{(k-1)^2 - n^2}{(k-1)^2 - 1}} \quad (6)$$

При $k \leq 2$ уравнение (5) корней не имеет. Следовательно, углы отклонения лучей S_0, S_1, S_2 изменяются монотонно, а для углов отклонения лучей S_3, S_4 существуют экстремальные значения, можно показать, что эти экстремумы являются точками минимума.

В пределах видимого диапазона показатель воды изменяется незначительно, поэтому вычислим минимальные углы отклонения для желтого цвета. Для

лучей S_3 $\rho^* = \sqrt{\frac{4 - 1,333^2}{4 - 1}} \approx 0,861.$

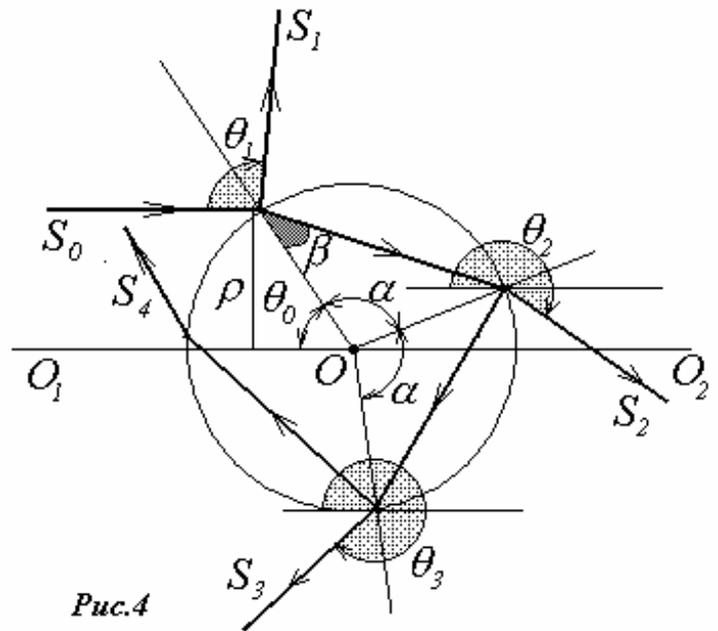


Рис.4

Этому значению соответствует угол отклонения (рассчитанный по формуле (4) при $k = 3$)

$$\theta_{3min} \approx 317,9^\circ. \quad (7)$$

Для лучей S_4 $\rho^* = \sqrt{\frac{9 - 1,333^2}{9 - 1}} \approx 0,950$, и соответствующий угол отклонения (рассчитанный по формуле (4) при $k = 4$)

$$\theta_{4min} \approx 410,9^\circ. \quad (8)$$

Построим графики (рис. 5) зависимостей этих углов от параметра ρ (конечно, вручную сделать это затруднительно, но с помощью компьютера проблем не представляет). Обратите внимание, углы θ_1, θ_2 монотонно возрастают при увеличении параметра ρ . В то же время углы θ_3, θ_4 сначала уменьшаются, достигают минимума, а затем начинают возрастать. Это значит, что при увеличении расстояния от оптической оси отклонение луча уменьшается, достигает предельного значения, затем начинает возрастать. На рис.6 показан ход лучей S_3 вблизи точки минимального отклонения.

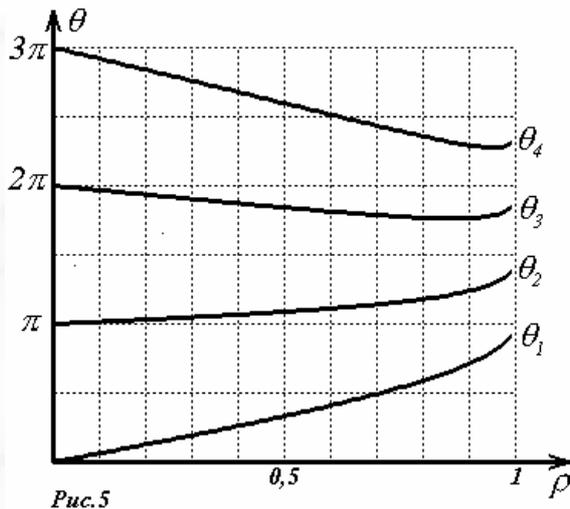


Рис.5

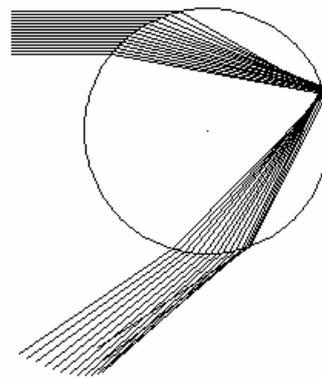


Рис.6

3. При наблюдении радуги глаз человека аккомодируется (настраивается) «на бесконечность», то есть

фокусное расстояние хрусталика равняется расстоянию до сетчатки. Следовательно, лучи попадающие в глаз человека параллельно друг другу независимо от их источника, после преломления в хрусталике соберутся на сетчатке в одной точке.

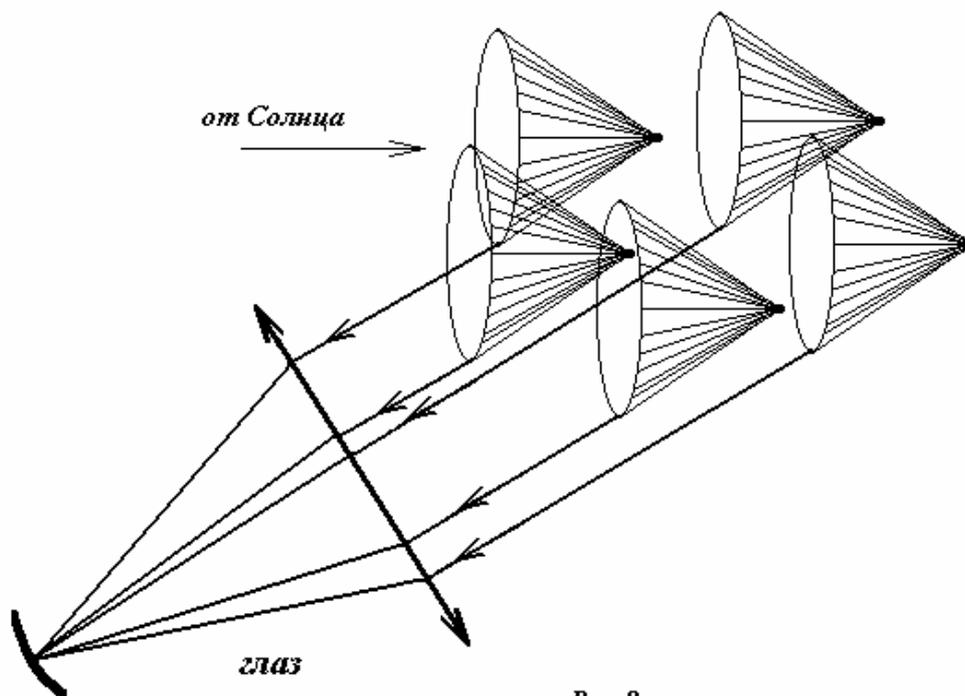


Рис. 8

Так как конусы лучей, выходящие из капли под одинаковыми углами к оптической оси, обладают осевой симметрией, то на сетчатке они образуют кольцо. Обратите внимание, что при обычных условиях наблюдения радуги, в глаз человека попадут лучи, которые выходят из капель только «вниз», поэтому на сетчатке будет сформирована только часть кольца, расположенная на нижней части сетчатки. Однако, изображение всех предметов на сетчатке является перевернутым (обратный поворот осуществляет мозг человека!), поэтому человек воспринимает эту часть кольца как обращенную выпуклостью вверх..

4. Наличие точки экстремума для лучей является настоящей катастрофой², так как вблизи этого предельного значения концентрируется значительная часть светового потока. Если отнестись к понятию силы света (световой поток в единицу телесного угла) формально, по определению

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \quad (9)$$

(где Φ - световой поток, Ω - телесный угол), то вблизи точки экстремума $d\Omega \rightarrow 0$, следовательно $I \rightarrow \infty$. С физической точки зрения, конечно, сила света не обращается в бесконечность, так как величина «бесконечно малого» телесного угла ограничена снизу (например, размером зрачка человеческого глаза).

² Название «катастрофа» является в данном случае строгим математическим термином, существует даже математическая теория катастроф.

Поясним эффект резкого возрастания силы света вблизи точки минимума с помощью графика (рис.7) зависимости $\theta(\rho)$. Выделим два участка одинаковой ширины³ $\Delta\theta$ - один на участке монотонности, а другой в районе минимума. Хорошо видно, что во втором случае ширина интервала $\Delta\rho^*$ значительно больше!

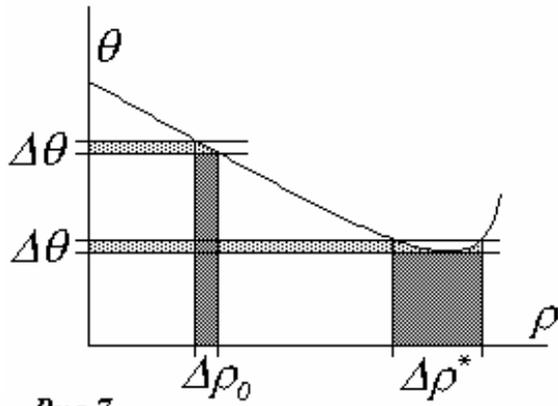


Рис.7

Более того, можно утверждать, что если $\Delta\theta$ является малой величиной, то $\Delta\rho_0$ является малой величиной того же порядка, а $\Delta\rho^*$ малой величиной не является.

Все эти рассуждения и демонстрируют, что значительная доля падающих лучей концентрируется вблизи точки минимального отклонения, которую мы и наблюдаем как дугу радуги.

Именно наличие минимума в угле отклонения лучей является основной (и не очевидной) причиной возникновения радуги.

5. Фактически мы уже получили все необходимые данные, чтобы найти угловой размер радуги. Как показано в п.4. дуге соответствуют углы минимального отклонения, которые были вычислены в п.3.

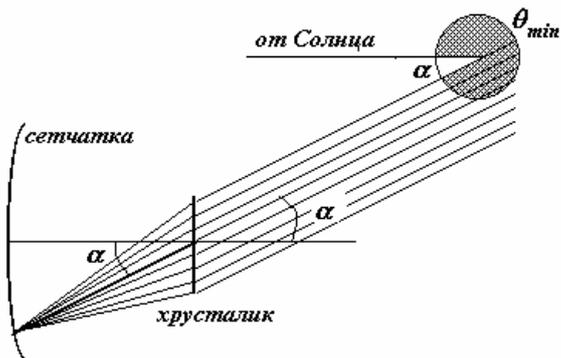
Рассмотрим еще раз преломление этих лучей в глазу человека (мы изобразим ход лучей только в одной плоскости, содержащей оптическую ось глаза - остальное можно достроить, используя осевую симметрию задачи).

Как следует из рис. , угловой размер основной радуги (образованной лучами S_3 по нашей терминологии), равен $\alpha = 360^\circ - \theta_{3min} \approx 42,1^\circ$

Аналогично, для вторичной радуги, образованной лучами S_4 , можно вычислить по формуле

$$\alpha = \theta_{4min} - 360^\circ \approx 50,9^\circ.$$

Заметим, что основную радугу формируют лучи, попадающую в верхнюю часть капли, а вторую дугу формируют лучи, попадающие в нижнюю часть капли.



³ Более последовательно было бы выделять участки одинаковых телесных углов, но в данном случае нас больше интересует качественное описание, а не точность расчетов интенсивности, которые, в принципе, не слишком сложно провести.

6. Понятно, что угловая ширина радуги $\delta\alpha$ равна угловому расстоянию $\delta\theta$ между углами минимального отклонения, соответствующими крайним длинам волн. Поэтому можно посчитать значения этих углов по изложенной выше методике. Однако такие вычисления достаточно громоздки, и проводить их надо весьма тщательно, с большой точностью в промежуточных расчетах. Мы воспользуемся малостью изменения показателя преломления и воспользуемся несколько иным способом, заменяющим громоздкие арифметические расчеты чуть менее громоздкими алгебраическими преобразованиями. Зависимость угла отклонения от прицельного параметра описывается формулой (3), в которую необходимо подставить значение прицельного параметра, соответствующее минимуму функции (3). Это значение определяется по формуле (6) (Чтобы не загромождать обозначения мы опустим «звездочку» в этой функции). Функция (3) зависит от показателя преломления n как явно, так и посредством зависимости ρ от n . Вычислим производную функции (3) по переменной n :

$$\frac{d\theta_k}{dn} = \frac{2\rho'}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{n^2}}} \left(\frac{\rho'}{n} - \frac{\rho}{n^2} \right), \quad (10)$$

где ρ' - производная функции (6) по n . Первые два слагаемых в формуле (10) взаимно уничтожаются (это условие экстремума!), поэтому изменение угла минимального отклонения описывается функцией

$$\frac{d\theta_k}{dn} = \frac{2\rho}{n\sqrt{n^2-\rho^2}} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{(k-1)^2-n^2}{n^2-1}}, \quad (11)$$

где использовано явное выражение для ρ , определяемое формулой (6). Таким образом, угловая ширина радуги описывается формулой

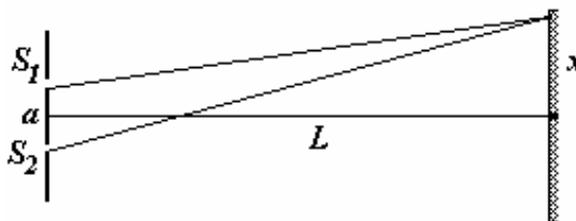
$$\delta\alpha \approx \frac{d\theta_k}{dn} \Delta n = 2 \frac{\Delta n}{n} \sqrt{\frac{(k-1)^2-n^2}{n^2-1}}, \quad (12)$$

в которой в качестве n можно взять его среднее значения, а величина Δn равна разности показателей преломления для крайних длин волн. Численные значения, полученные с помощью этой формулы, таковы:

ширина основной радуги $\delta\alpha \approx 0,038 \approx 2,3^\circ$, вторичной $\delta\alpha \approx 0,069 \approx 4,0^\circ$.

Задача 18.

В интерференционной схеме Юнга две узкие параллельные щели S_1 и S_2 , расстояние между которыми равно a , освещаются плоской волной, падающей нормально на экран со щелями. На расстоянии



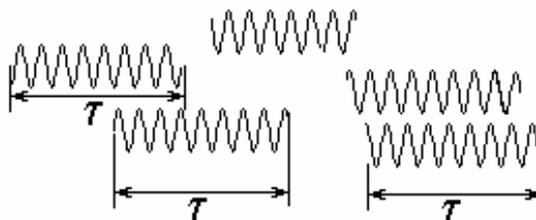
L ($L \gg a$) расположен экран, на котором наблюдается интерференционная картина. Исследуется зависимость интенсивности света на этом экране от координаты x ($x \ll L$) - расстояния до оси симметрии системы.

1. Щели освещены монохроматической волной с длиной волны λ . Найдите распределение интенсивности света на экране. Определите ширину интерференционной полосы (расстояние между двумя последовательными максимумами интенсивности).

2. Пусть щели освещены двумя монохроматическими волнами равной интенсивности с близкими длинами волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$ ($\Delta\lambda \ll \lambda$). Опишите распределение интенсивности света на экране в этом случае.

3. Щели осветили некогерентным излучением, содержащим непрерывный спектр длин волн, лежащих в узком интервале от λ_0 до $\lambda_0 + \Delta\lambda$ ($\Delta\lambda \ll \lambda_0$). Опишите распределение интенсивности света на экране в этом случае.

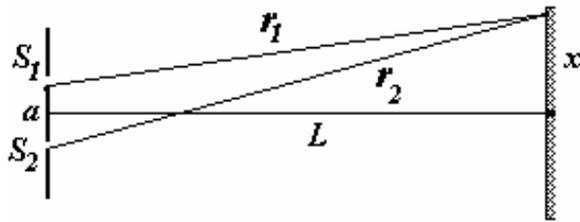
4. Рассмотрим следующую модель частично когерентного света. Световой поток представим в виде случайной совокупности цугов - ограниченных во времени и пространстве участков синусоидальных волн. Все цуги имеют одинаковую частоту, амплитуду и длительность τ . Однако начальные фазы колебаний изменяются от цуга к цугу случайным образом.



Опишите интерференционную картину на экране в интерференционной схеме Юнга, если щели освещены частично когерентным светом, модель которого представлена выше. Покажите, что качественно интерференционная картина совпадает с картиной, описанной в п.3. Установите связь между величинами τ и $\Delta\lambda$ (а также с шириной спектра $\Delta\nu$), чтобы две описанные интерференционные картины качественно совпадали.

Решение.

1. В точке, находящейся на расстоянии x от оси системы будут складываться два колебания - волны пришедшие от обеих щелей. Разность фаз колебаний определяется разностью путей $r_2 - r_1$ от щелей:



$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1). \quad (1)$$

Из элементарных геометрических соображений можно записать

$$\begin{aligned} r_2^2 &= L^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \\ r_1^2 &= L^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Вычитая почленно из первого равенства второе, получим

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2xa. \quad (3)$$

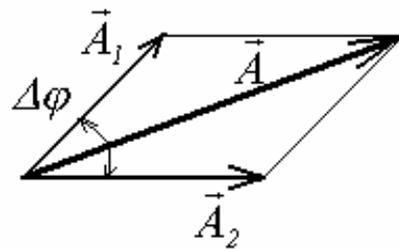
С учетом того, что $L \gg x, a$, можно положить $r_2 + r_1 \approx 2L$. Поэтому разность хода между лучами рассчитывается по формуле

$$r_2 - r_1 = \frac{xa}{L}. \quad (4)$$

Соответствующая разность фаз определяется выражением

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{xa}{L}. \quad (5)$$

Для вычисления интенсивности суммарного колебания удобно воспользоваться методом векторных диаграмм. При сложении двух колебаний \vec{A}_1 и \vec{A}_2 с равными амплитудами $|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2| = A_0$ амплитуда



результатирующего вектора рассчитывается по формуле

$$A = 2A_0 \cos \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Тогда интенсивность суммарной волны, (пропорциональная квадрату амплитуды) подчиняется закону

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi a}{\lambda L} x, \quad (6)$$

где $I_0 = A_0^2$ - интенсивность, создаваемая одной щелью.

Максимум интенсивности будет наблюдаться в тех точках x_k , где разность хода лучей равна целому числу длин волн, или где выполняется условие $\frac{\pi a}{\lambda L} x_k = k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, из которого следует

$$x_k = \frac{\lambda L}{a} k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

Следовательно, ширина интерференционной полосы может быть рассчитана по формуле

$$\delta x = \frac{\lambda L}{a}. \quad (8)$$

2. Так волны разных частот не интерferируют между собой, то результирующая интенсивности просто равна сумме интенсивностей обеих компонент, каждая из которых определяется формулой (6):

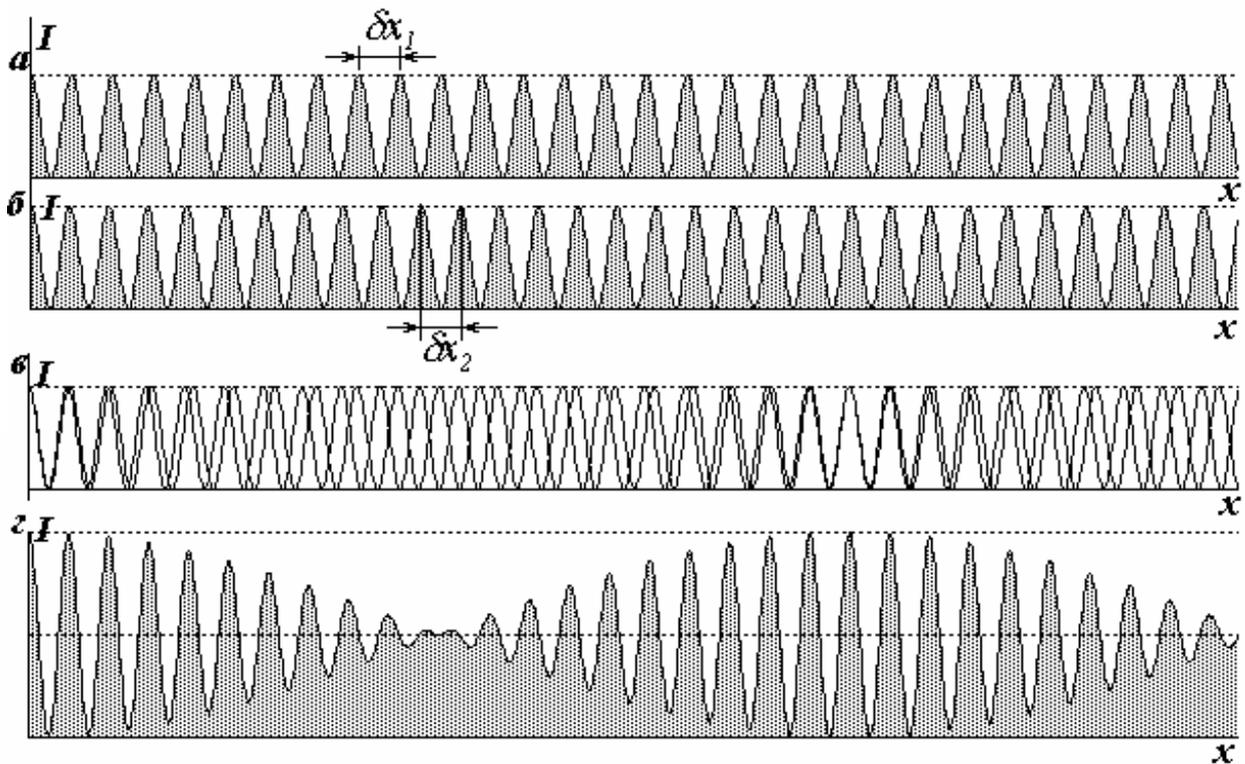
$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = 4I_0 \left(\cos^2 \frac{\pi a}{\lambda L} x + \cos^2 \frac{\pi a}{(\lambda + \Delta\lambda)L} x \right) = \\ &= 2I_0 \left(2 + \cos \frac{2\pi a}{\lambda L} x + \cos \frac{2\pi a}{(\lambda + \Delta\lambda)L} x \right) \approx \\ &\approx 4I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi a}{\lambda L} x \cdot \cos \frac{\pi a}{\lambda L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} x \right) \end{aligned} \quad (9)$$

При выводе последнего соотношения мы учли, что $\Delta\lambda \ll \lambda$, поэтому $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} \right) \approx \frac{1}{\lambda}$, а $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} \right) \approx \frac{\Delta\lambda}{2\lambda^2}$.

Из соотношения (9), следует, что распределение интенсивности на экране представляет собой своеобразные «пространственные биения» - периодическое распределение интенсивности, определяемое формулой (6), модулируется медленно изменяющейся функцией $\cos \frac{\pi a}{\lambda L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} x$.

Проиллюстрируем это явление графически. На рисунке представлены графики зависимости интенсивностей обеих компонент от координаты x (а, б), наложение этих графиков (в) и их сумма (г). Данные графики построены для $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0,05$.

Интенсивности, соответствующие двум монохроматическим компонентам, представляют собой периодические решетки с незначительно различающимися ширинами полос δx_1 и δx_2 . В районе нулевого максимума, максимумы разных решеток совпадают, при увеличении порядка интерференции расстояние между максимумами двух решеток возрастает и, наконец, в некоторой точке максимум одной решетки совпадает с минимумом другой. В этой области интерференционная картина исчезает. При дальнейшем увеличении порядка интерференции ситуация периодически повторяется.



Таким образом, мы можем оценить порядок интерференционной полосы, в районе которой интерференционная картина исчезает, с помощью соотношений

$$k^* \delta x_1 = (k^* + \frac{1}{2}) \delta x_2, \text{ откуда находим } k^* = \frac{\delta x_2}{2(\delta x_1 - \delta x_2)} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}. \text{ Число}$$

интерференционных полос между двумя последовательными исчезновениями интерференционной картины оценивается по очень красивой формуле $N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$.

Заметим, что при x , соответствующем номеру полосы k^* модулирующий множитель $\cos \frac{\pi a}{\lambda L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} x$ обращается в нуль.

3. В данной ситуации необходимо проинтегрировать вклады всех спектральных компонент (6) в заданном спектральном интервале. То есть распределение интенсивности света на экране может быть вычислено по формуле

$$I = C \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} (1 + \cos \frac{2\pi a x}{\lambda L}) d\lambda, \quad (10)$$

где C - некоторый постоянный множитель, определяющий интенсивность падающего излучения. Для вычисления интеграла воспользуемся малостью величины $\Delta\lambda$ и преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0 + \delta} \approx \frac{1}{\lambda_0} (1 - \frac{\delta}{\lambda_0}). \text{ Тогда интеграл (10) примет вид}$$

$$\begin{aligned}
I &= C \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} \left(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda L}\right) d\lambda = C \int_0^{\Delta\lambda} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 L} \left(1 - \frac{\delta}{\lambda_0}\right)\right)\right) d\delta = \\
&= C\Delta\lambda \left(1 + \cos \frac{2\pi a}{\lambda_0 L} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, и в данном случае на экране наблюдается система интерференционных полос шириной $\delta x = \frac{\lambda_0 L}{a}$, которая модулируется функцией

$$F(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}. \tag{12}$$

Для удобства анализа обозначим $\xi = \frac{x}{\delta x} = \frac{ax}{\lambda_0 L}$. Заметим, что параметр ξ есть координата x , измеренная в единицах ширины полосы. Тогда распределение интенсивности (11) примет вид

$$I = C\Delta\lambda \left(1 + \cos 2\pi\xi \cdot \frac{\sin\left(\pi\xi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(\pi\xi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}\right). \tag{13}$$

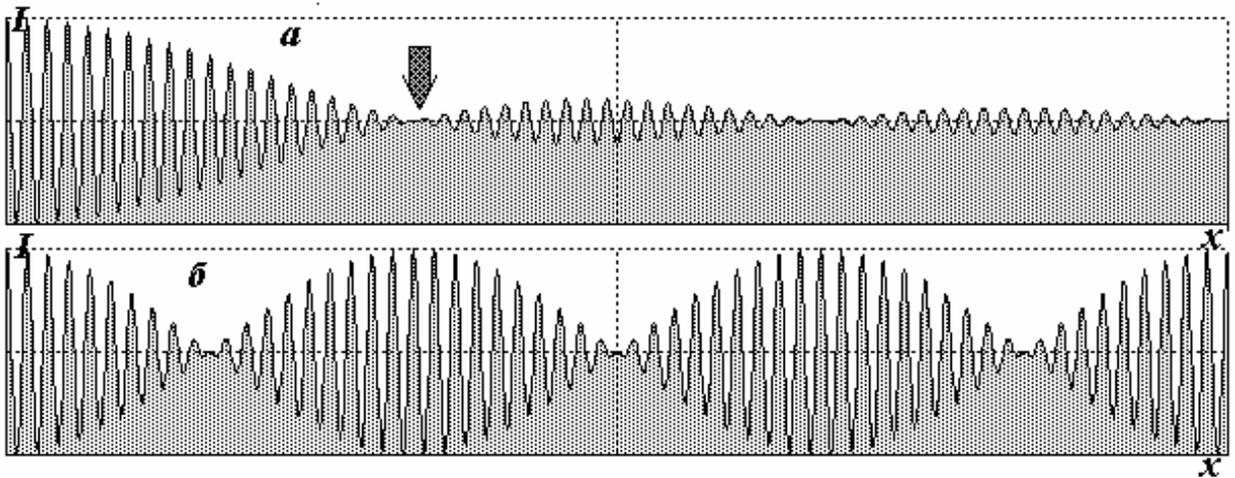
Модулирующая функция $F(\xi) = \frac{\sin\left(\pi\xi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(\pi\xi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}$ стремится к нулю при возрастании

координаты x (соответственно и ξ). Поэтому число видимых полос интерференции ограничено. Минимальное значение аргумента этой функции, при котором она обращается в нуль, можно определить из условия

$\pi\xi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \pi$, то есть $F(\xi) = 0$ при $\xi = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$. Эта величина является максимальным

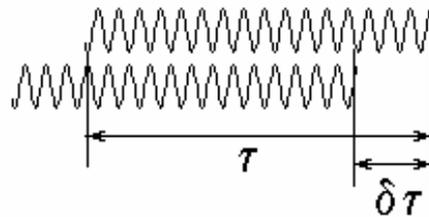
порядком интерференционной полосы. Соответствующее значение координаты

$$x^* = \frac{\lambda_0 L}{a} \cdot \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{L}{a} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \tag{14}$$



На рисунке изображен график функции (11) (рис.а), ниже для сравнения в том же горизонтальном масштабе построен график функции (9) (рис. б) при одинаковом значении отношения $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0,05$. Обратите внимание, в той области (отмеченной стрелкой на рис.), где интерференционная картина от источника со сплошным спектром исчезает, интерференционная картина от двух монохроматических источников имеет максимальную контрастность.

4. Так как различные пути имеют различные фазы, они интерферировать не будут. Иными словами, интерферирует каждый путь «сам с собой» - при прохождении через щели возникают два когерентных пучка. При изменении координаты x изменяется область их перекрытия.



В области их перекрытия наблюдается интерференция, к которой добавляется постоянная интенсивность от не перекрывающихся «хвостов». Поэтому результирующую интенсивность света на экране можно представить в виде суммы

$$I = \left(1 - \frac{\delta\tau}{\tau}\right) 2I_0 \cos^2 \frac{\pi a}{\lambda L} x + \frac{\delta\tau}{\tau} \cdot I_0, \quad (15)$$

где величина временного сдвига может быть рассчитана по очевидной формуле (c - скорость света):

$$\delta\tau = \frac{r_2 - r_1}{c} = \frac{xa}{cL}. \quad (16)$$

(Естественно, эти формулы применимы при $\delta\tau < \tau$, в противном случае интенсивность света равна I_0 - интенсивности создаваемой одним исходным пучком).

Таким образом, распределение интенсивности света на экране будет иметь вид

$$I = \begin{cases} I_0 \left(2 \left(1 - \frac{ax}{cL\tau} \right) \cos^2 \frac{\pi a}{\lambda L} x + \frac{ax}{cL\tau} \right), & \text{при } x < \frac{cL\tau}{a} \\ I_0 & \text{при } x > \frac{cL\tau}{a} \end{cases} \quad (17)$$

Интерференционные полосы исчезают в данном случае при $x^* = \frac{cL\tau}{a}$.

Сравнивая данное выражение с формулой (14), заключаем, что качественное соответствие между картинками будет наблюдаться при

$$\frac{L}{a} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = \frac{cL\tau}{a},$$

или при $\tau = \frac{\lambda_0^2}{c\Delta\lambda}$. (18)

Перейдем от ширины спектра, заданной в длинах волн к ширине спектра, заданной в частотах колебаний ν . Как известно, связь между частотой и длиной волны задается уравнением $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Поэтому $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$.

При использовании этого соотношения, формула (18) приобретает изящный вид,

$$\tau = \frac{l}{\Delta\nu}. \quad (18a)$$

На рисунке показаны распределения интенсивности в двух рассмотренных случаях (а - по формуле (11), б - по формуле (17)) при выполнении условия (18), как видите картины действительно схожи.

