ФИЗИКА
Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников
Под редакцией А.Г Чертова
М. "Высшая школа"1983

Задача 101.

Дано: $R = 1,2$ *м*; $\varphi = At + Bt^3$;
$A = 0,5$ *рад/с*; $B = 0,2$ *рад/с*^{3};
$t = 4$ *с*

Определить $a_\tau,\ a_n,\ a$

Решение
Угловая скорость и угловое ускорение при движении точки по окружности равны соответственно:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (At + Bt^3)' = A + 3Bt^2;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (A + 3Bt^2)' = 6Bt;$$

Тангенциальное и нормальное ускорения точки:

$$a_\tau = \varepsilon R = 6RBt; \qquad a_n = \omega^2 R = (A + 3Bt^2)^2 R;$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Вычисляем величины для момента времени $t = 4$ *с*:

$$a_\tau = 6 \cdot 1,2 \cdot 0,2 \cdot 4 = 1,44 \text{ м/с}^2;$$
$$a_n = (0,5 + 3 \cdot 0,2 \cdot 4^2)^2 \cdot 1,2 = 16,43 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение

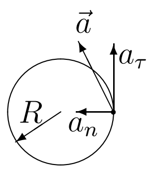
$$a = \sqrt{(1,44)^2 + (16,43)^2} = 16,49 \text{ м/с}^2.$$

Задача 102.

Дано: $R = 1$ *м*; $\xi = At + Bt^2$;
$A = 8$ *м/с*; $B = -1$ *м/с*^{2};
$t = 2$ *с*.

Определить $v,\ a$

Решение



Скорость движения точки по окружности:

$$v = \frac{d\xi}{dt} = (At + Bt^2)' = A + 2Bt.$$

В момент времени $t = 2$ *с*:

$$v = 8 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

Тангенциальное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = (A + 2Bt)' = 2B = 2 \cdot (-1) = -2 \text{ м}/c^2.$$

Нормальное ускорение точки:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4^2}{1} = 4 \text{ м}/c^2.$$

Полное ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 4,47 \text{ м}/c^2.$$

Задача 103.

Дано: $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$;
$x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$;
$A_1 = 10$ м; $B_1 = 1 \frac{м}{c}$; $C_1 = -2 \frac{м}{c^2}$;
$A_2 = 3$ м; $B_2 = 2 \frac{м}{c}$; $C_2 = 0,2 \frac{м}{c^2}$;

Определить $\tau, \ a_1, a_2$

Решение

Скорости точек выражаются через производные по времени от координат:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = (A_1 + B_1 t + C_1 t^2)' = B_1 + 2C_1 t;$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = (A_2 + B_2 t + C_2 t^2)' = B_2 + 2C_2 t;$$

Приравнивая скорости точек при $t = \tau$, получаем

$$B_1 + 2C_1 t = B_2 + 2C_2 t; \qquad 1 + 2 \cdot (-2)\tau = 2 + 2 \cdot 0,2\tau$$

$$1 - 4\tau = 2 + 0,4\tau; \qquad \tau = -0,23 \ c;$$

Время получилось отрицательное. Если до начала отсчёта времени $t = 0$ точки двигались по тем же законам, то их скорости были равны по величине и направлению за 0,23 с до начала отсчёта времени.

Ускорения точек:

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = (B_1 + 2C_1 t)' = 2C_1 = 2(-2) = 4 \ \frac{м}{c^2};$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = (B_2 + 2C_2 t)' = 2C_2 = 2(0,2) = 0,4 \ \frac{м}{c^2}$$

Ускорения точек не зависят от времени.

Задача 104.

Дано: $R = 0,5$ м; $\varphi = At + Bt^3$;
$A = 2$ рад$/c$; $B = 0,2$ рад$/c^3$;
$t = 3$ c.

Определить a

Решение

Угловая скорость и угловое ускорение колеса равны соответственно:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (At + Bt^3)' = A + 3Bt^2;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (A + 3Bt^2)' = 6Bt;$$

Тангенциальное и нормальное ускорения точки на ободе колеса равны:

$$a_\tau = \varepsilon R = 6RBt;$$
$$a_n = \omega^2 R = (A + 3Bt^2)^2 R.$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(6RBt)^2 + (A + 3Bt^2)^4 R^2}.$$

В момент времени $t = 3$ *с* полное ускорение равно

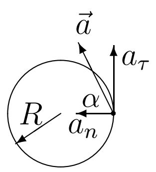
$$a = \sqrt{(6 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 3)^2 + (2 + 3 \cdot 0,2 \cdot 3^2)^4 \cdot (0,5)^2} = 32,8 \text{ м/с}^2.$$

Задача 105.

Дано: $R = 8$ *м*; $a_n = 4$ *м/с*^{2};
$\alpha = 60°$.

Определить v, a_τ

Решение



Нормальное ускорение точки равно

$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

Отсюда

$$v = \sqrt{a_n R} = \sqrt{4 \cdot 8} = 5,66 \quad \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Полное ускорение точки:

$$a = \frac{a_n}{\cos\alpha}$$

Тангенциальное ускорение точки:

$$a_\tau = \sqrt{a^2 - a_n^2} = \sqrt{\frac{a_n^2}{\cos^2\alpha} - a_n^2} = a_n\sqrt{\frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = a_n tg(\alpha);$$

$$a_\tau = 4 \cdot tg(60°) = 6,93 \quad \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Задача 106.

Дано: $x = At + Bt^3$;
$A = 6$ *м/с*; $B = -0,125$ *м/с*^{3};
$t_1 = 2$ *с*; $t_2 = 6$ *с*.

Определить $< v >$

Решение

Скорость точки равна

$$v = \frac{dx}{dt} = (At + Bt^3)' = A + 3Bt^2 = 6 - 0,375t^2;$$

В некоторый момент времени t_0 скорость точки становится равной нулю, определяем t_0:

$$6 - 0,375t_0^2 = 0; \qquad t_0 = \sqrt{\frac{6}{0,375}} = 4 \text{ с}.$$

После этого момента скорость точки становится отрицательной и точка движется в обратном направлении.
Путь, пройденный точкой от момента t_1 до t_0, равен
$s_1 = (At_0 + Bt_1^3) - (At_0 + Bt_1^3) = (6 \cdot 4 - 0,125 \cdot 4^3) - (6 \cdot 2 - 0,125 \cdot 2^3) = 4,5$ *м*.
Двигаясь в обратном направлении от момента времени t_0 до t_2 точка проходит путь

$$s_2 = (At_0 + Bt_0^3) - (At_2 + Bt_2^3) = (6 \cdot 4 - 0,125 \cdot 4^3) - (6 \cdot 6 - 0,125 \cdot 6^3) = 7 \text{ м}.$$

Средняя путевая скорость:

$$< v >= \frac{s_1 + s_2}{t_2 - t_1} = \frac{4,5 + 7}{6 - 2} = 2,88 \text{ м/с}.$$

Задача 107.

Дано: $x = At + Bt^3;$
$A = 3$ *м/с*; $B = 0,06$ *м/с*^{3};
$t_1 = 0;$ $t_2 = 3$ *с*.

Определить v_x, a_x, $< v_x >$, $< a_x >$

Решение

Скорость точки равна

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (At + Bt^3)' = A + 3Bt^2 = 3 + 0,18t^2.$$

Ускорение точки

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (A + 3Bt^2)' = 6Bt = 0,36t.$$

В момент времени $t_1 = 0$:
$v_{x1} = 3 + 0,18 \cdot (0)^2 = 3$ *м/с*; $a_{x1} = 0,36 \cdot 0 = 0$.
В момент времени $t_2 = 3$ *с*:
$v_{x2} = 3 + 0,18 \cdot (3)^2 = 4,62$ *м/с*; $a_{x2} = 0,36 \cdot 3 = 1,08$ *м/с*^{2}.
Путь, пройденный точкой от момента t_1 до t_2, равен
$s = x_2 - x_1 = (At_2 + Bt_2^3) - (At_1 + Bt_1^3) = (3 \cdot 3 + 0,06 \cdot 3^3) - 0 = 10,62$ *м*.
Средняя скорость:

$$< v_x >= \frac{s}{t_2 - t_1} = \frac{10,62}{3 - 0} = 3,54 \text{ м/с}.$$

Среднее ускорение:

$$< a_x >= \frac{v_{x2} - v_{x1}}{t_2 - t_1} = \frac{4,62 - 3}{3 - 0} = 0,54 \text{ м/с}^2.$$

Задача 108.

Дано: $R = 0,2$; $\varphi = A + Bt + Ct^3$;
$A = 3$ *рад*; $B = -1$ $\frac{рад}{с}$;
$t = 10$ *с*; $C = 0,1$ $\frac{рад}{с^3}$.

Определить a_τ, a_n, a

Решение

Угловая скорость точки равна

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (A + Bt + Ct^3)' = B + 3Ct^2;$$

Угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{dt} = (B + 3Ct^2)' = 6Ct;$$

Нормальное ускорение точки:

$$a_n = \omega^2 R = (B + 3Ct^2)^2 R$$

Тангенциальное ускорение:

$$a_\tau = \varepsilon R = 6CtR$$

В момент времени $t = 10$ *с*:

$$a_n = (-1 + 3 \cdot 0,1 \cdot 10^2)^2 \cdot 0,2 = 168,2 \text{ м/с}^2; \qquad a_\tau = 6 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 0,2 = 1,2 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение:

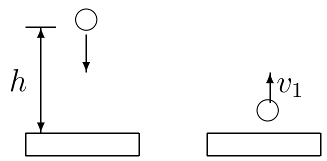
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(162,2)^2 + (1,2)^2} \approx 168,2 \text{ м/с}^2.$$

Задача 109.

Дано: $h = 2$ *м*; $h_1 = 0,5$ *м*;
$m = 200$ *г*.

Определить p

Решение



Падая с высоты h шарик, шарик ударяется о плиту со скоростью

$$v = \sqrt{2gh},$$

а отскакивает от плиты со скоростью

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}.$$

Импульс шарика до удара равен mv и направлен вниз, а после удара шарика о плиту его импульс равен mv_1 и направлен вверх. С учётом направления импульсов изменение импульса шарика равно

$$p = mv + mv_1 = m(v + v_1)$$
$$p = m(\sqrt{2gh} + \sqrt{2gh_1}) = m\sqrt{2g} \cdot (\sqrt{h} + \sqrt{h_1})$$
$$p = 0,2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,8} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{0,5}) = 1,88 \ \frac{кг \cdot м}{с}.$$

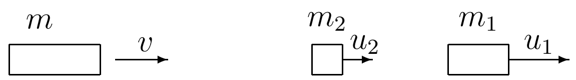
Задача 110.

Дано: $m = 8$ *кг*; $v = 250$ *м/с*

$m_1 = 6$ *кг*; $u_1 = 400$ *м/с*

Определить u_2

Решение



По закону сохранения импульса

$$mv = m_1u_1 + m_2u_2$$

где $m_2 = m - m_1 = 8 - 6 = 2$ *кг*. Получаем:

$$u_2 = \frac{mv - m_1u_1}{m_2} = \frac{8 \cdot 250 - 6 \cdot 400}{2} = -200 \text{ м/с}.$$

Скорость u_2 получилась отрицательной – меньший осколок полетит в обратном направлении.

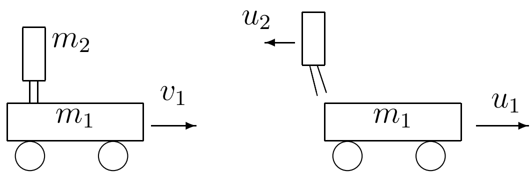
Задача 111.

Дано: $v_1 = 3$ *м/с*; $m_1 = 210$ *кг*;

$m_2 = 70$ *кг*; $u_1 = 4$ *м/с*.

Определить u_{21}

Решение



Первоначально импульс тележки с человеком был равен:

$$(m_1 + m_2)v_1$$

Обозначим u_1 и u_2 – скорость тележки и человека относительно земли после того, как человек прыгнул. Импульс системы при этом стал равен

$$m_1u_1 - m_2u_2$$

По закону сохранения импульса

$$(m_1 + m_2)v_1 = m_1u_1 - m_2u_2$$

Отсюда получаем

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot u_1 - \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) v_1$$

Скорость человека относительно тележки

$$u_{21} = u_1 + u_2 = u_1 + \frac{m_1}{m_2} \cdot u_1 - \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) v_1 = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)(u_1 - v_1)$$

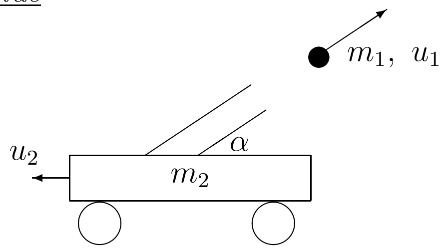
$$u_{21} = \left(\frac{210}{70} + 1\right)(4 - 3) = 4 \text{ м/с}$$

Задача 112.

Дано: $m_1 = 60$ *кг*; $u_1 = 480$ *м/с*;
$\alpha = 30°$; $m_2 = 18$ *т*;

Определить u_2

Решение



Первоначально импульс ситемы был равен нулю.
По закону сохранения импульса после выстрела сумма проекций импульсов снаряда и платформы на горизонтальное направление также будет равна нулю:

$$m_1 u_1 \cos\alpha - m_2 u_2 = 0$$

Отсюда получаем

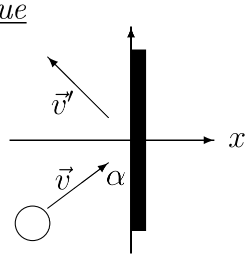
$$u_2 = \frac{m_1 u_1 \cos\alpha}{m_2} = \frac{60 \cdot 480 \cdot \cos(30°)}{18 \cdot 10^3} = 1,4 \quad \text{м/с}.$$

Задача 114.

Дано: $m = 300$ *г*; $v = 8$ *м/с*.
$\alpha = 60°$.

Определить Δp

Решение

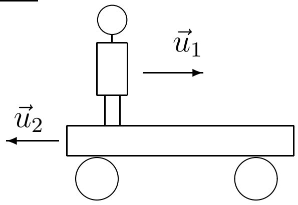


До удара шарика о стенку его составляющая скорости, перпендикулярная стенке, равнялась
$$v_x = v \sin\alpha$$
После удара о плиту эта составляющая скорости изменяет знак и равна
$$v'_x = -v \sin\alpha.$$
Изменение импульса шарика
$$\Delta p_x = m(v'_x - v_x) = -2mv \sin\alpha$$
По закону сохранения импульса импульс, полученный стенкой, равен
$$\Delta p = -\Delta p_x = 2mv \sin\alpha;$$
$$\Delta p = 2 \cdot 0,3 \cdot 8 \cdot \sin 60° = 4,16 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Задача 115.
Дано: $m_1 = 60$ *кг*; $m_2 = 20$ *м/с*
$v = 2$ *м/с*.

Определить u_2

Решение



Обозначим скорость человека относительно пола u_1, а скорость тележки относительно пола u_2. Относительная скорость с учётом направления $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, показанных на рисунке, равна

$$v = u_1 + u_2;$$

Так как первоначально человек и тележка покоились, то по закону сохранения импульса

$$m_1u_1 - m_2u_2 = 0$$

Из двух уравнений получаем:

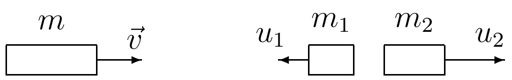
$$u_1 = v - u_2; \qquad m_1(v - u_2) - m_2u_2 = 0;$$

$$u_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v = \frac{60}{60 + 20} \cdot 1 = 0,75 \text{ м/с}$$

Задача 116.
Дано: $v = 400$ *м/с*;
$m_1 = 0,4m$; $u_1 = 150$ *м/с*.

Определить u_2

Решение



По закону сохранения импульса

$$m_2u_2 - m_1u_1 = mv$$

где u_1, u_2 – скорости осколков.
Выражаем массы осколков m_1 и m_2 через начальную массу снаряда m и подставляем в уравнение

$$m_1 = 0,4m; \qquad m_2 = m - 0,4m = 0,6m$$

$$0,6mu_2 - 0,4mu_1 = mv; \qquad 0,6u_2 - 0,4u_1 = v;$$

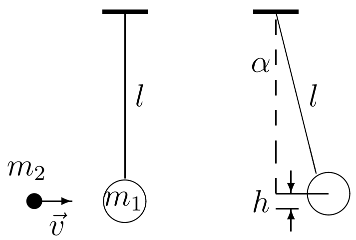
$$u_2 = \frac{v + 0,4u_1}{0,6} = \frac{400 + 0,4 \cdot 150}{0,6} = 767 \text{ м/с}.$$

Задача 117.

Дано: $l = 1,8$ *м*; $m_1 = 8$ *кг*;
$m_2 = 4$ *г*; $\alpha = 3°$

Определить v

Решение



Обозначим u скорость шара вместе с пулей в момент, когда пуля попадёт в шар и застрянет в нём. По закону сохранения импульса

$$m_2 v = (m_1 + m_2)u; \qquad u = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, v;$$

Так как масса пули в 2000 раз меньше массы шара, то в сумме $m_1 + m_2$, стоящей в знаменателе, можно пренебречь массой пули. При этом с высокой точностью

$$u = \frac{m_2}{m_1}\, v;$$

В дальнейшем пренебрегаем изменением массы шара из-за застрявшей в нём пули.
Получив кинетическую энергию, шар поднимется на высоту h. При этом его кинетическая энергия перейдёт в потенциальную:

$$\frac{m_1 u^2}{2} = m_1 g h; \qquad u^2 = 2gh;$$

Выражаем высоту поднятия центра масс шара h через угол α:
$h = l(1 - \cos\alpha)$;
Получаем:

$$u^2 = 2gl(1 - \cos\alpha); \qquad \left(\frac{m_2}{m_1}\, v\right)^2 = 2gl(1 - \cos\alpha);$$

$$v = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)};$$

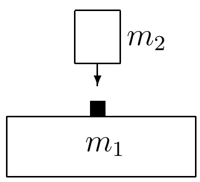
$$v = \frac{8}{0,004}\sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 1,8(1 - \cos 3°)} = 440 \text{ м/с}$$

Задача 118.

Дано: $m_1 = 300$ *кг*; $m_2 = 80$ *кг*;

Определить η

Решение



Так как удар молота неупругий, то после удара молот и наковальня будут иметь одинаковую скорость v. Обозначим скорость молота до удара u.
Если пренебречь массой куска железа, то по закону сохранения импульса
$m_2u = (m_1 + m_2)v$
Первоначальная кинетическая энергия молота:

$$T_1 = \frac{m_2u^2}{2}$$

Кинетическая энергия молота вместе с наковальней после удара равна

$$T_2 = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2};$$

Из первого уравнения:

$$v = \frac{m_2u}{m_1 + m_2};$$

$$T_2 = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \frac{(m_2u)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_2^2u^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Энергия, затраченная на деформацию куска железа, равна $T_1 - T_2$. Отсюда КПД равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} =$$

$$= 1 - \frac{m_2^2u^2}{2(m_1 + m_2)} \cdot \frac{2}{m_2u^2} = 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

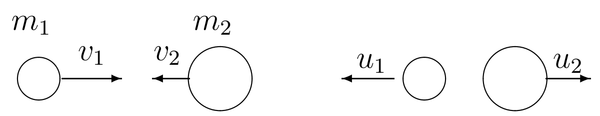
$$\eta = \frac{300}{300 + 8} = 0,974.$$

Задача 119.

Дано: $m_1 = 1$ *кг*; $v_1 = 4$ *м/с*;
$m_2 = 2$ *кг*; $v_2 = 3$ *м/с*.

Определить u_1, u_2

Решение



По закону сохранения импульса

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1u_1 + m_2u_2 \quad (1)$$

По закону сохранения энергии при упругом ударе

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} \quad (2)$$

Выражаем u_2 из уравнения (1) и подставляем в уравнение (2)

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2}(v_1 + u_1) - v_2$$

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2\Big[\frac{m_1}{m_2}(v_1+u_1) - v_2\Big]^2$$

Подставляем числовые значения:

$$1\cdot 4^2 + 2\cdot 3^2 = 1\cdot u_1^2 + 2\cdot\Big[\frac{1}{2}(4+u_1) - 3\Big]^2; \qquad 34 = u_1^2 + 2\cdot\Big[\frac{1}{2}\cdot u_1 - 1\Big]^2$$

Получаем квадратное уравнение для u_1:

$$\frac{3}{2}u_1^2 - 2u_1 - 32 = 0; \qquad u_1^2 - \frac{4}{3}u_1 - \frac{64}{3} = 0;$$

Уравнение имеет два решения:

$$u_1 = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\Big(\frac{2}{3}\Big)^2 + \frac{64}{3}} = \frac{2}{3} \pm \frac{14}{3}$$

Выбираем второе решение, для которого $u_1,\ u_2$ отличаются от $v_1,\ v_2$:

$$u_1 = \frac{2}{3} + \frac{14}{3} = \frac{16}{3} = 5,33\ \text{м/с}; \qquad u_2 = \frac{1}{2}(4 + \frac{16}{3}) - 3 = \frac{5}{3} = 1,66\ \text{м/с}.$$

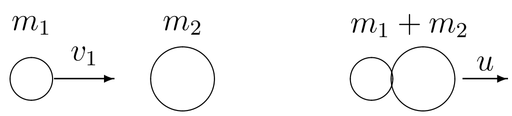
Задача 120.

Дано: $m_1 = 3$ *кг*; $v_1 = 2$ *м/с*

$m_2 = 5$ *кг*.

Определить A

Решение



После неупругого удара шары будут двигаться вместе со скоростью u. По закону сохранения импульса

$$m_1v_1 = (m_1+m_2)u; \qquad u = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

Кинетическая энергия шаров до удара:

$$T_1 = \frac{m_1v_1^2}{2}$$

Кинетическая энергия шаров после удара:

$$T_2 = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)}{2}\cdot\frac{m_1^2v_1^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)}.$$

Работа, совершаемая при деформации шаров:

$$A = T_1 - T_2 = \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1v_1^2}{2}\cdot\Big[1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\Big] = \frac{m_1v_1^2}{2}\cdot\frac{m_2}{m_1+m_2};$$

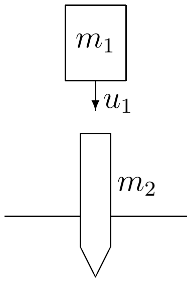
$$A = \frac{3\cdot 2^2}{2}\cdot\frac{5}{3+5} = 3,75\ \text{Дж}.$$

Задача 121.

Дано: $m_1 = 0,5$ *т* $= 500$ *кг*; $m_2 = 120$ *кг*.

Определить η

Решение



Так как удар бойка по свае неупругий, то после удара скорость u_2 бойка и сваи одна и таже. Обозначим скорость бойка до удара u_1. По закону сохранения импульса

$$m_1u_1 = (m_1 + m_2)u_2$$

Первоначальная кинетическая энергия бойка:

$$T_1 = \frac{m_1u_1^2}{2}$$

Кинетическая энергия сваи с бойком, идущая на преодоление сопротивления грунта:

$$T_2 = \frac{(m_1 + m_2)u_2^2}{2};$$

$$u_2 = \frac{m_1u_1}{m_1 + m_2};$$

$$T_2 = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \frac{(m_1u_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2u_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

КПД:

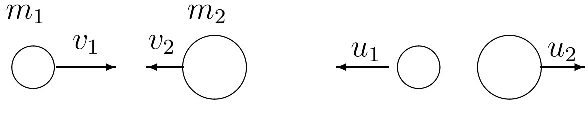
$$\eta = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_1^2u_1^2}{2(m_1 + m_2)} \cdot \frac{2}{m_1u_1^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}; \qquad \eta = \frac{500}{500 + 120} = 0,81.$$

Задача 122.

Дано: $m_1 = 4$ *кг*; $v_1 = 5$ *м/с*;
$m_2 = 6$ *кг*; $v_2 = 2$ *м/с*.

Определить u_1, u_2

Решение



По закону сохранения импульса

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1u_1 + m_2u_2 \quad (1)$$

По закону сохранения энергии при упругом ударе

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad (2)$$

Выражаем u_2 из уравнения (1) и подставляем в уравнение (2)

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2}(v_1 + u_1) - v_2$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 \Big[\frac{m_1}{m_2}(v_1 + u_1) - v_2\Big]^2$$

Подставляем числовые значения:

$$4 \cdot 5^2 + 6 \cdot 2^2 = 4 \cdot u_1^2 + 6 \cdot \Big[\frac{4}{6}(5 + u_1) - 2\Big]^2$$

$$124 = 4 \cdot u_1^2 + 6 \cdot \Big[\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot u_1\Big]^2$$

Получаем квадратное уравнение для u_1:

$$u_1^2 + 1,6 u_1 - 17 = 0$$

Уравнение имеет два решения:

$$u_1 = -0,8 \pm \sqrt{(0,8)^2 + 17} = -0,8 \pm 4,2;$$

Первое решение $u_1 = -0,8 - 4,2 = -5$ *м/с* соответствует тому, что скорости шаров после удара не изменились. Выбираем второе решение:

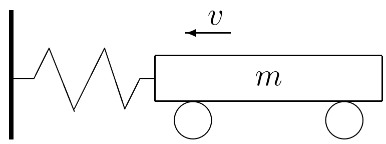
$$u_1 = -0,8 + 4,2 = 3,4 \text{ м/с}; \qquad u_2 = \frac{4}{6}(5 + 3,4) - 2 = 3,6 \text{ м/с}$$

Задача 123.

Дано: $m = 35$ *т*; $v = 0,2$ *м/с*;
$\Delta l = 12$ *см*.

Определить F_{max}, Δt

Решение



При торможении кинетическая энергия вагона переходит в потенциальную энергию сжатой пружины:

$$П = \frac{k \Delta l^2}{2} = \frac{m v^2}{2}$$

где k – жесткость пружины. Получаем

$$k = \frac{m v^2}{\Delta l^2} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot (0,2)^2}{(0,12)^2} = 9,72 \cdot 10^4 \quad \frac{Н}{м}.$$

Максимальная сила сжатия пружины:

$$F_{max} = k \cdot \Delta l = 9,72 \cdot 10^4 \cdot 0,12 = 1,17 \cdot 10^3 \ Н.$$

Если пренебречь трением, то при торможении вагон будет двигаться также, как грузик на пружине, совершающий периодические колебания. Время от момента, когда скорость уменьшится от максимальной до нулевой, равно четверти периода колебаний:

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}};$$

$$\Delta t = \frac{3,14}{2}\sqrt{\frac{35\cdot 10^3}{9,72\cdot 10^4}} = 0,94\ \textit{с}.$$

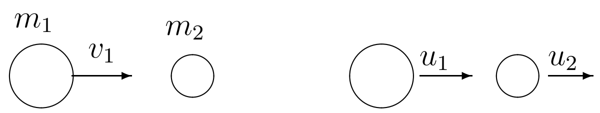
Задача 124.

Дано: $m_1 = 5$ *кг*; $v_1 = 1$ *м/с*

$m_2 = 2$ *кг*; $v_2 = 0$

Определить u_1, u_2

Решение



По закону сохранения импульса

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2 \quad (1)$$

По закону сохранения энергии при упругом ударе

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} \quad (2)$$

Выражаем u_2 из уравнения (1) и подставляем в уравнение (2)

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2}(v_1 - u_1)$$

$$m_1v_1^2 = m_1u_1^2 + m_2\Big(\frac{m_1}{m_2}\Big)^2(v_1 - u_1)^2$$

$$v_1^2 = u_1^2 + \frac{m_1}{m_2}(v_1 - u_1)^2 = u_1^2 + \frac{m_1}{m_2}v_1^2 - 2\frac{m_1}{m_2}v_1u_1 + \frac{m_1}{m_2}u_1^2$$

Получаем квадратное уравнение для u_1:

$$\Big(1 + \frac{m_1}{m_2}\Big)u_1^2 - 2\frac{m_1}{m_2}v_1u_1 + \Big(\frac{m_1}{m_2} - 1\Big)v_1^2 = 0$$

Подставляем числовые значения:

$$\Big(1 + \frac{5}{2}\Big)u_1^2 - 2\cdot\frac{5}{2}\cdot 1\cdot u_1 + \Big(\frac{5}{2} - 1\Big)\cdot 1^2 = 0; \qquad u_1^2 - \frac{10}{7}\cdot u_1 + \frac{3}{7} = 0$$

$$u_1 = \frac{5}{7} \pm \sqrt{\Big(\frac{5}{7}\Big)^2 - \frac{3}{7}} = \frac{5}{7} \pm \frac{2}{7}$$

Первое решение

$$u_1 = \frac{5}{7} + \frac{2}{7} = 1\ \textit{м/с}$$

соответствует тому, что скорости шаров после удара не изменились. Выбираем второе решение:

$$u_1 = \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7} = 0,43\ м/с;$$

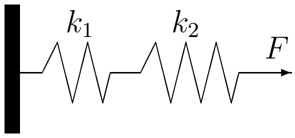
$$u_2 = \frac{5}{2}(1 - 0,43) = 1,42\ м/с.$$

Задача 133.

Дано: $k_1 = 400\ Н/м$; $k_2 = 250\ Н/м$;
$\Delta l_1 = 2\ см = 0,02\ м.$

Определить A

<u>*Решение*</u>



Сила, растягивающая пружину, равна

$$F = k\Delta l$$

где Δl – растяжение пружины. Так как пружины соединены последовательно, то их растягивает одна и та же сила. Отсюда получаем:

$$k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2; \qquad l_2 = \frac{k_1}{k_2} \cdot \Delta l_1.$$

Потенциальная энергия растянутой пружины равна

$$П = \frac{k\Delta l^2}{2},$$

а потенциальная энергия двух пружин

$$П = \frac{k_1\Delta l_1^2}{2} + \frac{k_2\Delta l_2^2}{2} = \frac{k_1\Delta l_1^2}{2} + \frac{k_2}{2} \cdot \frac{k_1^2}{k_2^2}\Delta l_1^2 =$$

$$= \frac{k_1\Delta l_1^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right).$$

Работа растяжения пружин равна их потенциальной энергии:

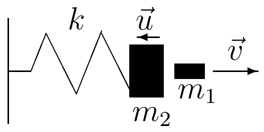
$$A = П = \frac{400 \cdot (0,02)^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{400}{250}\right) = 0,21 \quad Дж.$$

Задача 134.

Дано: $m_1 = 10$ *г*; $v = 300$ *м/с*;
$m_2 = 200$ *г*; $k = 25$ *кН/м*.

Определить x

<u>*Решение*</u>



После выстрела затвор начинается двигаться со скоростью u в сторону, противоположную направлению движения пули. По закону сохранения импульса

$$m_1 v - m_2 u = 0; \qquad u = \frac{m_1}{m_2}\, v.$$

Кинетическая энергия, полученная затвором, переходит в потенциальную энергию сжатой пружины:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}; \qquad \frac{kx^2}{2} = \frac{m_2 u^2}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$x^2 = \frac{m_2 u^2}{k}; \qquad x = \sqrt{\frac{m_2}{k}} \cdot u \qquad x = \sqrt{\frac{m_2}{k}} \cdot \frac{m_1}{m_2}\, v.$$

$$x = \sqrt{\frac{0,2}{25 \cdot 10^3}} \cdot \frac{0,01}{0,2} \cdot 300 = 0,042 \text{ м} = 4,2 \text{ см}.$$

Задача 135.

Дано: $k = 500$ *Н/м*; $F = 100$ *Н*;
$\Delta l = 2$ *см* $= 0,02$ *м*.

Определить A

<u>*Решение*</u>

Работа по сжатию пружины равна:

$A = \Pi_2 - \Pi_1$,

где Π_1 и Π_2 – потенциальные энергии сжатой пружины в начальном и конечном состояниях,

$$A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}$$

Из уравнения $F = kx_1$ деформация пружины в начальном состоянии равна $x_1 = F/k$. Деформация в конечном состоянии:

$$x_2 = x_1 + \Delta l = \frac{F}{k} + \Delta l$$

Получаем

$$A = \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{F}{k} + \Delta l\right)^2 - \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{F}{k}\right)^2 =$$

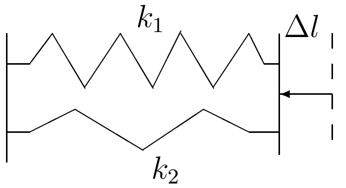
$$= \frac{k\Delta l}{2} \cdot \left(\frac{2F}{k} + \Delta l\right); \qquad A = \frac{500 \cdot 0,02}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 100}{500} + 0,02\right) = 2,1 \text{ Дж}.$$

Задача 136.

Дано: $k_1 = 0,5$ *кН/м*; $k_2 = 1$ *кН/м*;
$\Delta l = 4$ *см*.

Определить Π

Решение



Потенциальная энергия сжатой пружины равна

$$\Pi = \frac{k\Delta l^2}{2}.$$

Потенциальная энергия двух пружин

$$\Pi = \frac{k_1\Delta l^2}{2} + \frac{k_2\Delta l^2}{2} = \frac{(k_1 + k_2)\Delta l^2}{2} =$$

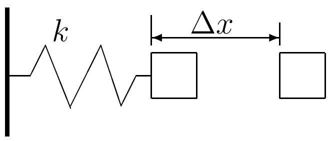
$$= \frac{(500 + 1000)\cdot(4\cdot 10^{-2})^2}{2} = 1,2 \quad \text{Дж.}$$

Задача 137.

Дано: $k = 800$ *Н/м*; $x = 6$ *см*;
$\Delta x = 8$ *см*.

Определить A

Решение



Работа по сжатию пружины равна:

$$A = \Pi_2 - \Pi_1,$$

где Π_1 и Π_2 – потенциальные энергии сжатой пружины в начальном и конечном состояниях:

$$\Pi_1 = \frac{kx^2}{2}; \qquad \Pi_2 = \frac{k(x + \Delta x)^2}{2};$$

Получаем

$$A = \frac{k(x + \Delta x)^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{k[(x + \Delta x)^2 - x^2]}{2};$$

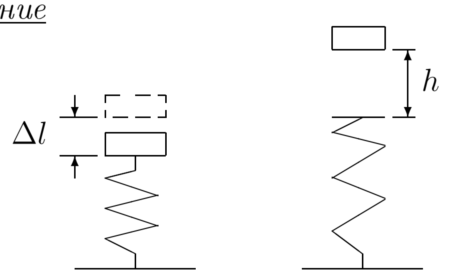
$$A = \frac{800\cdot[(0,06 + 0,08)^2 - (0,06)^2]}{2} = 6,4 \text{ Дж.}$$

Задача 138.

Дано: $\Delta l = 3$ *мм*; $h = 8$ *см*.

Определить Δl_2

<u>*Решение*</u>



В первом случае пружина сжата силой веса груза $F = mg$, отсюда получаем уравнение

$$F = mg = k \cdot \Delta l$$

где m – масса груза, k – жёсткость пружины. При падении груза с высоты h пружина сжимается на Δl_2. В этот момент времени потенциальная энергия груза $\Pi = mg(h + \Delta l_2)$ переходит в потенциальную энергию сжатой пружины:

$$mg(h + \Delta l_2) = \frac{1}{2} \cdot k(\Delta l_2)^2$$

Подставляем mg из первого уравнения, получаем

$$\Delta l(h + \Delta l_2) = \frac{1}{2} \cdot (\Delta l_2)^2$$

$$(\Delta l_2)^2 - 2\Delta l \Delta l_2 - 2\Delta l h = 0$$

$$(\Delta l_2)^2 - 0,6\Delta l_2 - 4,8 = 0$$

Квадратное уравнение имеет два решения:

$$\Delta l_2 = 0,3 \pm \sqrt{(0,3)^2 + 4,8} = 0,3 \pm 2,21 \text{ \textit{см}}.$$

Выбираем положительный корень:

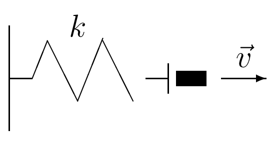
$$\Delta l_2 = 0,3 + 2,21 = 2,51 \text{ \textit{см}}.$$

Задача 139.

Дано: $k = 150$ *Н/м*; $m = 8$ *г*;
$\Delta x = 4$ *см*.

Определить v

<u>*Решение*</u>



Потенциальная энергия сжатой пружины

$$\Pi = \frac{k\Delta x^2}{2}$$

Переходит при выстреле в кинетическую энергию пули

$$\frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда получаем

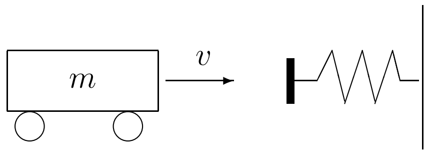
$$v^2 = \frac{k\Delta x^2}{m}; \qquad v = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \Delta x; \qquad v = \sqrt{\frac{150}{0,008}} \cdot 0,04 = 5,5 \quad \frac{\textit{м}}{\textit{с}}.$$

Задача 140.

Дано: $m = 16$ *т* $= 1600$ *кг*; $v = 0,6$ *м/с*;
$\Delta l = 8$ *см* $= 0,08$ *м*.

Определить k

Решение



В момент остановки вагона его кинетическая энергия полностью перейдёт в потенциальную энергию сжатия пружины:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$$

где Δl – деформация пружины. Отсюда получаем:

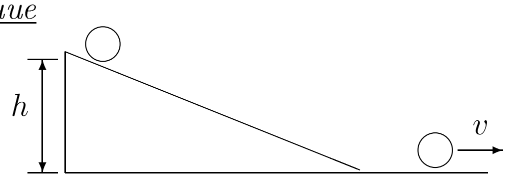
$$k = \frac{mv^2}{(\Delta l)^2} = \frac{1600 \cdot (0,6)^2}{(0,08)^2} = 9 \cdot 10^5 \ \frac{\textit{Н}}{\textit{м}}$$

Задача 141.

Дано: *сплошной цилиндр* $h = 20$ *см*.

Определить v

Решение



Обозначим массу цилиндра m, его радиус R.
При скатывании цилиндра его потенциальная энергия mgh переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения. По закону сохранения энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где момент инерции цилиндра равен $J = \frac{1}{2}\, mR^2$.
Выражаем угловую скорость цилиндра ω через скорость v поступательного движения:

$$v = \omega R; \qquad \omega = v/R.$$

Получаем

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}\, mR^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3}{4}\, mv^2; \qquad gh = \frac{3v^2}{4};$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}\, gh} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 9,8 \cdot 0,2} = 1,62 \ \textit{м/с}.$$

Задача 142.

Дано: $m = 12$ *кг*; $D = 30$ *см*;
$\varphi = A + Bt + Ct^3$;
$A = 4$ *рад*; $B = -2$ *рад/с*;
$C = 0,2$ *рад/с*^{3}; $t = 3$ *с*.

Определить M

Решение

По уравнению динамики вращательного движения момент сил равен

$$M = J \cdot \varepsilon$$

где J – момент инерции цилиндра, ε – угловое ускорение.

Масса тонкостенного цилиндра сосредоточена на расстоянии $R = D/2$ от оси вращения, поэтому его момент инерции равен

$$J = mR^2 = \frac{mD^2}{4}$$

Угловая скорость и угловое ускорение цилиндра:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (A + Bt + Ct^3)' = B + 3Ct^2;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (B + 3Ct^2)' = 6Ct;$$

Получаем

$$M = \frac{mD^2}{4} \cdot 6Ct = \frac{3}{2}\, mD^2Ct$$

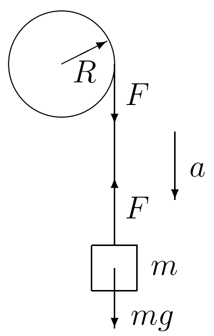
$$M = \frac{3}{2} \cdot 12 \cdot (0,3)^2 \cdot 0,2 \cdot 3 = 0,97 \quad H \cdot м.$$

Задача 143.

Дано: $D = 60$ *см*; $m = 2$ *кг*;
$t = 3$ *с*; $\omega = 9$ *рад/с*.

Определить J

Решение



На груз действуют сила тяжести mg и сила натяжения шнура F. По второму закону Ньютона ускорение груза равно

$$a = \frac{mg - F}{m} = g - \frac{F}{m};$$

Сила натяжения шнура приложена также к маховику и создаёт момент силы $M = FR = FD/2$. По основному уравнению динамики вращательного движения угловое ускорение маховика равно

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{FD}{2J}$$

где J – момент инерции диска. Выражаем отсюда силу и подставляем в первое уравнение:

$$F = \frac{2J\varepsilon}{D}; \qquad a = g - \frac{2J\varepsilon}{mD}$$

Так как угловое ускорение связано с линейным ускорением соотношением $a = \varepsilon R = \varepsilon D/2$, то получаем

$$\frac{\varepsilon D}{2} = g - \frac{2J\varepsilon}{mD}; \qquad J = \frac{mDg}{2\varepsilon} - \frac{mD^2}{4}$$

При равноускоренном вращении угловая скорость равна $\omega = \varepsilon t$. Получаем

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}; \qquad J = \frac{mDgt}{2\omega} - \frac{mD^2}{4};$$

$$J = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot 9,8 \cdot 3}{2 \cdot 9} - \frac{2 \cdot (0,6)^2}{4} = 1,78\ \textit{кг} \cdot \textit{м}^2.$$

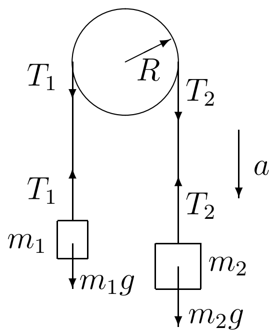
Задача 144.

Дано: $m_1 = 50$ *г*; $m_2 = 60$ *г*

$D = 4$ *см*; $\varepsilon = 1,5$ *рад/с*.

Определить J

Решение



Обозначим T_1 и T_2 – силы натяжения нитей. По основному уравнению вращательного движения

$$\varepsilon = \frac{M}{J}$$

где ε – угловое ускорение блока, M – момент сил, приложенный к блоку:

$$M = RT_2 - RT_1 = R(T_2 - T_1) = \tfrac{D}{2} \cdot (T_2 - T_1)$$

Обозначим линейное ускорение грузов a. По второму закону Ньютона:

$$m_1 a = T_1 - m_1 g; \qquad m_2 a = m_2 g - T_2;$$
$$T_1 = m_1(g + a); \qquad T_2 = m_2(g - a).$$

Выражаем линейное ускорение через угловое:

$$a = \varepsilon R = \varepsilon \cdot \frac{D}{2}$$

Получаем

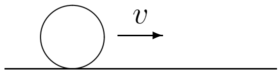
$$J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{D(T_2 - T_1)}{2\varepsilon} = \frac{D\left[m_2\left(g - \varepsilon\frac{D}{2}\right) - m_1\left(g + \varepsilon\frac{D}{2}\right)\right]}{2\varepsilon} =$$

$$= \frac{0,04 \cdot [0,06 \cdot (9,8 - 1,5 \cdot 0,02) - 0,05 \cdot (9,8 + 1,5 \cdot 0,02)]}{2 \cdot 1,5} = 1,58 \cdot 10^{-3} \quad \textit{кг} \cdot \textit{м}^2.$$

Задача 146.
Дано: *диск* $v = 8$ *м/с*; $s = 18$ *м*.

Определить k

Решение



Обозначим массу диска m, его радиус R.
Первоначальная кинетическеуя энергия диска равна

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где момент инерции диска равен $J = \frac{1}{2}\, mR^2$.
Выражаем угловую скорость цилиндра ω через скорость v поступательного движения:

$$v = \omega R; \qquad \omega = v/R.$$

Получаем

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}\, mR^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3}{4}\, mv^2.$$

При торможении кинетическая энергия диска затрачивается на преодоление силы трения. При этом работа силы трения равна $A = F_{mp}s$, где $F_{mp} = kmg$. Получаем:

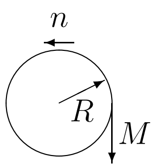
$$kmgs = \frac{3}{4}\, mv^2; \qquad k = \frac{3mv^2}{4mgs} = \frac{3v^2}{4gs};$$

$$k = \frac{3 \cdot 8^2}{4 \cdot 9,8 \cdot 18} = 0,272.$$

Задача 147.
Дано: $D = 30$ *см*; $m = 6$ *кг*;
$\Delta t = 8$ *с*; $n = 12$ *с*$^{-1}$.

Определить J

Решение



Под действием постоянного момента сил блок будет вращаться равнозамедленно. Его угловая скорость будет изменяться по закону

$$\omega = \omega_0 - \frac{M}{J}t$$

где J – момент инерции блока, $\omega_0 = 2\pi n$ – начальная угловая скорость вращения блока. Так как масса распределена равномерно по ободу, то его момент инерции

$$J = mR^2 = \frac{mD^2}{4}.$$

Блок остановится, когда его угловая скорость станет равной нулю:

$$\omega_0 - \frac{M}{J}\Delta t = 0;$$

Получаем:

$$M = \frac{J\omega_0}{\Delta t} = \frac{mD^2 2\pi n}{4\Delta t} = \frac{\pi m D^2 n}{2\Delta t};$$

$$M = \frac{3,14 \cdot 6 \cdot (0,3)^2 \cdot 12}{2 \cdot 8} = 1,27\ \textit{Н} \cdot \textit{м}.$$

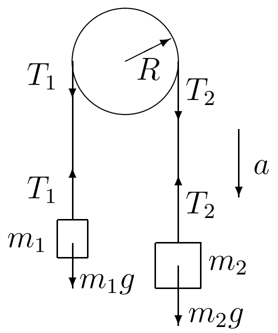
Задача 148.

Дано: $m = 0,4$ *кг*;

$m_1 = 0,3$ *кг*; $m_2 = 0,7$ *кг*

Определить $T_1,\ T_2$

Решение



Обозначим линейное ускорение грузов a. По второму закону Ньютона:

$$a = \frac{T_1 - m_1 g}{m_1}; \qquad a = \frac{m_2 g - T_2}{m_2} \quad (1)$$

где T_1, T_2 – силы натяжения нитей. На блок действует момент сил $M = R(T_2 - T_1)$ вызывающий угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{R(T_2 - T_1)}{J}$$

где $J = \frac{1}{2}mR^2$ – момент инерции диска. Так как угловое ускорение связано с линейным ускорением соотношением $a = \varepsilon R$, то получаем

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{R(T_2 - T_1)}{J}; \qquad a = \frac{R^2(T_2 - T_1)}{J} = \frac{2(T_2 - T_1)}{m}$$

Подставляем полученное выражение для a в уравнения (1):

$$\frac{2(T_2 - T_1)}{m} = \frac{T_1}{m_1} - g; \quad \frac{2(T_2 - T_1)}{m} = g - \frac{T_2}{m_2} \ (2)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{T_1}{m_1} - g = g - \frac{T_2}{m_2}; \qquad \frac{T_2}{m_2} = 2g - \frac{T_1}{m_1}; \qquad T_2 = 2gm_2 - \frac{m_2}{m_1}T_1$$

Подставляем T_2 в первое уравнение (2):

$$2(2gm_2 - \frac{m_2}{m_1}T_1 - T_1) = \frac{m}{m_1}T_1 - mg$$

$$4gm_2 - 2\frac{m_2}{m_1}T_1 - 2T_1 = \frac{m}{m_1}T_1 - mg$$

$$(4m_2 + m)g = (2\frac{m_2}{m_1} + 2 + \frac{m}{m_1})T_1$$

$$T_1 = \frac{m_1(4m_2 + m)g}{2m_1 + 2m_2 + m}$$

$$T_2 = 2gm_2 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{m_1(4m_2 + m)g}{2m_1 + 2m_2 + m} = 2gm_2 - \frac{m_2(4m_2 + m)g}{2m_1 + 2m_2 + m} = \frac{m_2(4m_1 + m)g}{2m_1 + 2m_2 + m}$$

Вычисляем:

$$T_1 = \frac{0,3 \cdot (4 \cdot 0,7 + 0,4) \cdot 9,8}{2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,7 + 0,4} = 3,92\ H$$

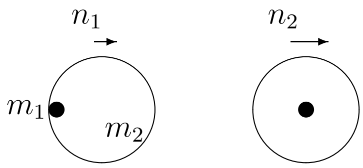
$$T_2 = \frac{0,7 \cdot (4 \cdot 0,3 + 0,4) \cdot 9,8}{2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,7 + 0,4} = 4,57\ H.$$

Задача 149.

Дано: $n_1 = 8$ *мин*$^{-1}$; $n_2 = 10$ *мин*$^{-1}$;
$m_1 = 70$ *кг*.

Определить m_2

Решение



Первоначально момент инерции системы был равен

$$J = J_0 + J_{чел},$$

где J_0 – момент инерции платформы; момент инерции человека $J_{чел} = m_1 R^2$, R – радиус платформы.

После того, как человек перешёл в центр платформы, его вклад в общий момент инерции стал равен нулю, так как человек рассматривается как материальная точка. Момент инерции системы стал равен $J = J_0$.

По закону сохранения момента импульса

$$\omega_1(J_0 + m_1R^2) = \omega_2 J_0$$

где начальная и конечная угловые скорости платформы равны

$$\omega_1 = 2\pi n_1; \qquad \omega_2 = 2\pi n_2.$$

Получаем уравнение

$$n_1(J_0 + m_1R^2) = n_2 J_0$$

Так как платформа представляет собой диск, то её момент инерции равен

$$J_0 = \frac{1}{2}\ m_2 R^2.$$

Подставляем в уравнение:

$$n_1(\frac{1}{2}\ m_2 + m_1) = n_2 \cdot \frac{1}{2}\ m_2;$$

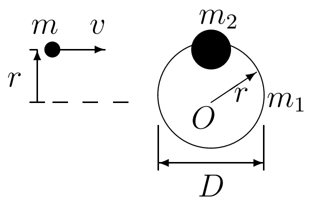
$$(n_2 - n_1) \cdot \frac{m_2}{2} = n_1 m_1; \qquad m_2 = \frac{2n_1 m_1}{n_2 - n_1};$$

$$m_2 = \frac{2 \cdot 8 \cdot 70}{10 - 8} = 560\ кг.$$

Задача 150.

Дано: $D = 0,8$ *м*; $m_1 = 6$ *кг*;
$m_2 = 60$ *кг*; $m = 0,5$ *кг*;
$r = 0,4$ *м*; $v = 5$ *м/с*.

Определить ω



Решение

По закону сохранения момента импульса, момент импульса системы $J\omega$, после того как человек поймал мяч, равен моменту импульса летящего мяча относительно оси O:

$$J\omega = mvr$$

где момент инерции J всей системы относительно оси O равен

$$J = J_М + J_Ч + J_0$$

$J_М = mr^2$ – момент инерции мяча;
$J_Ч = m_2 r^2$ – момент инерции человека;
$J_0 = \frac{1}{2}\, m_1 r^2$ – момент инерции диска;
Получаем:

$$(m + m_2 + \tfrac{1}{2}\, m_1) r^2 \omega = mvr$$

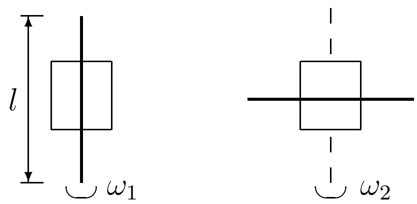
$$\omega = \frac{mv}{(m + m_2 + \frac{1}{2}\, m_1) r} = \frac{0,5 \cdot 5}{(0,5 + 60 + \frac{1}{2} \cdot 6)0,4} = 0,098 \quad рад/с.$$

Задача 152.

Дано: $\omega_1 = 4$ *рад/с*; $J = 5$ *кг* $\cdot$ *м*^{2};
$l = 1,8$ *м*; $m = 6$ *кг*.

Определить ω_2

Решение



Угловая скорость изменится из-за изменения момента инерции системы.
При вертикальном расположении стержня, когда он совпадает с осью вращения, его моментом инерции можно пренебречь. Момент инерции системы равен J.
После поворота момент инерции стержня относительно оси вращения равен

$$J_c = \frac{1}{12}\, ml^2$$

а суммарный момент инерции системы $J + J_c$. По закону сохранения момента импульса

$$\omega_1 J = (J + J_c)\omega_2$$

Отсюда

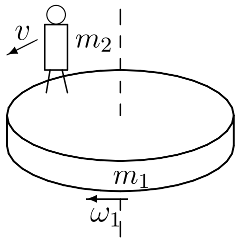
$$\omega_2 = \frac{J\omega_1}{J + J_c} = \frac{J\omega_1}{J + \dfrac{ml^2}{12}}; \qquad \omega_2 = \frac{5 \cdot 4}{5 + \dfrac{6 \cdot (1,8)^2}{12}} = 3 \text{ рад/с}.$$

Задача 153.

Дано: $D = 3$ *м*; $m_1 = 180$ *кг*;
$m_2 = 70$ *кг*; $v = 1,8$ *м/с*.

Определить ω_1

Решение



После начала движения человека платформа начнёт вращатся с угловой скоростью ω_1 навстречу человеку. Угловая скорость движения человека относительно платформы равна

$$\omega_{отн} = \frac{v}{R} = \frac{2v}{D}$$

Угловая скорость человека относительно неподвижной земли:

$$\omega_2 = \omega_{отн} - \omega_1$$

Так как первоначально система была неподвижна, её момент импульса равнялся нулю. По закону сохранения момента импульса он останется равным нулю после начала движения:

$$\omega_1 J_1 - \omega_2 J_2 = 0$$

где моменты инерции платформы и человека относительно оси вращения равны:

$$J_1 = \frac{1}{2}\, m_1 R^2; \qquad J_2 = m_2 R^2.$$

Получаем:

$$\omega_1 \cdot \frac{1}{2}\, m_1 R^2 - \omega_2 \cdot m_2 R^2 = 0; \qquad \omega_1 \cdot \frac{1}{2}\, m_1 - (\omega_{отн} - \omega_1) \cdot m_2 = 0$$

$$\omega_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\, m_1 + m_2\right) = \omega_{отн} m_2; \qquad \omega_1 = \frac{m_2}{\frac{1}{2}\, m_1 + m_2} \cdot \omega_{отн} = \frac{m_2}{\frac{1}{2}\, m_1 + m_2} \cdot \frac{2v}{D}$$

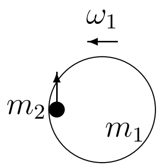
$$\omega_1 = \frac{70}{\frac{1}{2} \cdot 130 + 70} \cdot \frac{2 \cdot 1,8}{3} = 0,62 \text{ рад/с}.$$

Задача 154.

Дано: $m_1 = 280$ *кг*; $m_2 = 80$ *кг*.

Определить φ

Решение



Обозначим ω_2 угловую скорость человека относительно оси при его движении по платформе, ω_1 – угловая скорость платформы.
Первоначально момент импульса системы был равен нулю, поэтому по закону сохранения момента импульса

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2; \qquad \omega_2 = \frac{J_1}{J_2} \cdot \omega_1.$$

где $J_1 = \frac{1}{2}m_1R^2$ – момент инерции платформы, R – радиус платформы; $J_2 = m_2R^2$ – момент инерции человека. Получаем

$$\omega_2 = \frac{\frac{1}{2}m_1R^2}{m_2R^2} \cdot \omega_1 = \frac{m_1}{2m_2} \cdot \omega_1.$$

Относительно платформы человек движется с угловой скоростью

$$\omega_{отн} = \omega_1 + \omega_2,$$

и возвратится в исходную точку через время t повернувшись вокруг оси на 2π радиан. Время равно

$$t = \frac{2\pi}{\omega_{отн}} = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2\pi}{\omega_1 + \frac{m_1}{2m_2} \cdot \omega_1} = \frac{4\pi m_2}{\omega_1(2m_2 + m_1)}.$$

За это же время платформа повернется на угол

$$\varphi = t \cdot \omega_1 = \frac{4\pi m_2}{(2m_2 + m_1)};$$

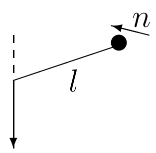
$$\varphi = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 80}{(2 \cdot 80 + 280)} = 2,28 \text{ } рад = 130^\circ$$

Задача 155.

Дано: $m = 60$ *г*; $l_1 = 1,2$ *м*;
$n_1 = 2$ c^{-1} $l_2 = 0,6$ *м*.

Определить n_2, A

Решение



При укорочении нити по закону сохранения момента импульса

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

где J_1, J_2 – начальный и конечный моменты инерции шарика относительно оси вращения,

$$J_1 = ml_1^2; \qquad J_2 = ml_2^2.$$

Угловые скорости вращения шарика:

$$\omega_1 = 2\pi n_1; \qquad \omega_2 = 2\pi n_2;.$$

Получаем

$$ml_1^2 \cdot 2\pi n_1 = ml_2^2 \cdot 2\pi n_2; \qquad l_1^2 n_1 = l_2^2 n_2;$$

$$n_2 = \frac{l_1^2}{l_2^2} \cdot n_1 = \frac{(1,2)^2}{(0,6)^2} \cdot 2 = 8 \text{ об/с}.$$

Совершённая работа равна разности между конечной и начальной кинетическими энергиями шарика:

$$A = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2} = \frac{1}{2}[ml_2^2(2\pi n_1)^2 - ml_1^2(2\pi n_1)^2] = 2\pi^2 m[l_2^2 n_1^2 - l_1^2 n_1^2];$$

$$A = 2 \cdot (3,14)^2 \cdot 0,06 \cdot [(0,6)^2 \cdot 8^2 - (1,2)^2 \cdot 2^2] = 20,4 \text{Дж}.$$

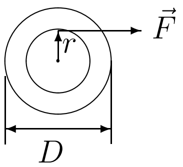
Задача 156.

Дано: $D = 75$ *см*; $m = 40$ *кг*

$F = 1$ *кН*; $r = 12$ *см*; $t = 10$ *с*.

Определить ε, n

Решение



По основному уравнению динамики вращательного движения угловое ускорение маховика равно

$$\varepsilon = \frac{M}{J}$$

где $M = Fr$ – момент приложенных сил, J – момент инерции маховика

$$J = \frac{1}{2} \cdot mR^2 = \frac{1}{2} \cdot m\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{mD^2}{8}$$

Угловое ускорение постоянно и равно

$$\varepsilon = \frac{8Fr}{mD^2} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0,12}{40 \cdot (0,75)^2} = 42,7 \text{ рад/с}^2.$$

Угловая скорость при равноускоренном вращении равна $\omega = \varepsilon t$. Частота вращения:

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\varepsilon t}{2\pi}.$$

При $t = 10$ *с*:

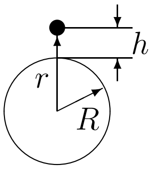
$$n = \frac{42,7 \cdot 10}{2 \cdot 3,14} = 67,9 \ \frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

Задача 157.

Дано: *Земля*, $h = 1000$ *км*.

Определить G

Решение



На тело, находящееся на расстоянии $r = R+h$ от центра Земли (R – радиус Земли), действует сила притяжения

$$F = \gamma\ \frac{mM}{r^2},$$

где γ – гравитационная постоянная, M – масса Земли, r – расстояние от центра Земли. Гравитационное поле:

$$G = \frac{F}{m} = \gamma\ \frac{M}{r^2}$$

На поверхности Земли при $r = R$, где R – радиус Земли, гравитационное поле равно $G = g$, g – ускорение свободного падения на поверхности Земли. Отсюда

$$g = \gamma\ \frac{M}{R^2}; \qquad \gamma M = gR^2;$$

$$G = \frac{gR^2}{r^2} = \frac{gR^2}{(R+h)^2} = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2};$$

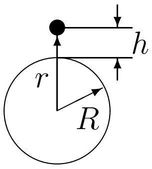
$$G = \frac{9,81}{\left(1+\frac{1000}{6370}\right)^2} = 7,33 \quad \frac{м}{с^2}.$$

Задача 158.

Дано: $m = 2$ *кг*;
1) $h = 1000$ *км*; 2) $h = \infty$

Определить A

Решение



На тело, находящееся на расстоянии $r = R+h$ от центра Земли (R – радиус Земли), действует сила притяжения

$$F = G\ \frac{mM}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса Земли.
Работа силы тяжести при падении тела на Землю равна

$$A = \int F dr = GmM \int\limits_R^r \frac{dr}{r^2} = -GmM\ \frac{1}{r}\Bigg|_R^r = GmM\ \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = GmM\ \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right).$$

1) При падении тела с высоты $h = 1000$ *км* $= 10^6$ *м*:

$$A = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{6,37 \cdot 10^6 + 10^6} \right) = 1,7 \cdot 10^7 \text{ \textit{Дж}}.$$

2) При падении тела из бесконечности ($h = \infty$):

$$A = \frac{GmM}{R} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6} = 12,5 \cdot 10^7 \text{ \textit{Дж}}.$$

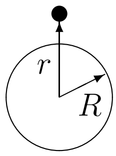
Задача 159.

Дано: $m = 30$ *кг*;

$g = 9,8$ *м/с*^{2}; $R = 6,37 \cdot 10^6$ *м*.

Определить A

Решение



Сила притяжения, действующее на тело массой m на поверхности Земли равна $F = mg$. Так как сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли r, то на тело, находящееся на расстоянии r от центра Земли, действует сила притяжения

$$F = mg \left(\frac{R}{r} \right)^2,$$

где R – радиус Земли.

Работа силы тяжести при падении метеорита из бесконечности на Землю равна

$$A = -\int_{\infty}^{R} F dr = -mgR^2 \int_{\infty}^{R} \frac{dr}{r^2} = mgR^2 \left. \frac{1}{r} \right|_{\infty}^{R} = mgR^2 \frac{1}{R} = mgR;$$

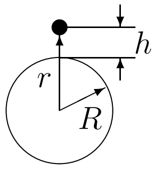
$$A = 30 \cdot 9,8 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ \textit{Дж}}.$$

Задача 160.

Дано: $v = 5$ *км/с* $= 5000$ *м/с*.

Определить h

Решение



По закону сохранения энергии кинетическая энергия ракеты пойдёт на увеличение её потенциальной энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \Pi_2 - \Pi_1,$$

где m -масса ракеты.
Потенциальная энергия в гравитационном поле Земли равна

$$\Pi = -G\frac{mM}{r},$$

где M -масса Земли, G – гравитационная постоянная, r -расстояние от центра Земли, $r = R + h$ (R – радиус Земли). Отсюда получаем:

$$\frac{mv^2}{2} = -G\frac{mM}{r_2} + G\frac{mM}{r_1} = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$r_1 = R; \quad r_2 = R + h.$

$$\frac{v^2}{2} = GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right);$$

$$\frac{v^2}{2GM} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}; \qquad \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} - \frac{v^2}{2GM}; \qquad h = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{v^2}{2GM}} - R;$$

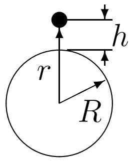
$$h = \frac{1}{\frac{1}{6,37\cdot 10^6} - \frac{(5000)^2}{2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}} - 6,37\cdot 10^6 = 7,959\cdot 10^6 - 6,37\cdot 10^6 =$$
$$= 1,59\cdot 10^6 \text{ м} = 1590 \text{ км}.$$

Задача 161.

Дано: *спутник Земли*; $T = 65$ *мин*;
$g = 9,8$ *м/с*^{2}; $R = 6,37\cdot 10^6$ *м*.

Определить h

Решение



Сила притяжения, действующее на тело массой m на поверхности Земли равна $F = mg$. Так как сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли r, то на спутник, находящийся на расстоянии r от центра Земли, действует сила притяжения

$$F = mg\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

где R – радиус Земли. Центростремительное ускорение спутника, которое сообщает ему сила притяжения, равно

$$a = \frac{F}{m} = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 = g\left(\frac{R}{h+R}\right)^2.$$

При движении по круговой орбите ускорение равно $a = v^2/r$. Получаем уравнение:

$$\frac{v^2}{r} = g\left(\frac{R}{r}\right)^2; \qquad v = \sqrt{\frac{g}{r}}\cdot R;$$

Период обращения спутника:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{R} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}; \qquad T^2 = \frac{(2\pi)^2 r^3}{R^2 g}; \qquad r = \sqrt[3]{g\left(\frac{TR}{2\pi}\right)^2};$$

Высота спутника над поверхностью Земли:

$$h = r - R = \sqrt[3]{g\left(\frac{TR}{2\pi}\right)^2} - R$$

Период обращения спутника: $T = 65 \cdot 60 = 3900$ *с*;

$$r = \sqrt[3]{9,81 \cdot \left(\frac{3900 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{2 \cdot 3,14}\right)^2} - 6,37 \cdot 10^6 = 5,35 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6 = -1,02 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

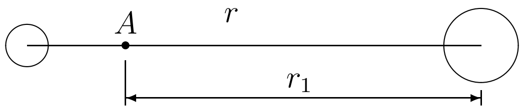
Высота получилась отицательная. В условии задан слишком маленький период T.

Задача 162.

Дано: $M_з = 81 M_л$; $r = 60 R_з$;

Определить r_1

Решение



На расстоянии r_1 от центра Земли в точке A напряжённости гравитационного поля Земли и Луны равны:

$$\gamma \cdot \frac{M_з}{r_1^2} = \gamma \cdot \frac{M_л}{(r - r_1)^2}$$

Отсюда получаем:

$$M_з (r - r_1)^2 = M_л r_1^2; \qquad 81(r - r_1)^2 = r_1^2; \qquad 80 r_1^2 - 162 r r_1 + 81 r^2 = 0.$$

Подставляем в уравнение $r = 60 R_з$, где $R_з$ – радиус Земли

$$r_1^2 - 121,5 r_1 + 3645 = 0$$

Квадратное уравнение имеет два решения:

$$r_1 = 60,75 \pm \sqrt{(60,75)^2 - 3645} = 60,75 \pm 6,75.$$

Выбираем решение $r_1 < 60 R_з$:

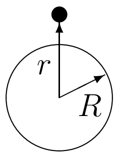
$$r_1 = 60,75 - 6,75 = 54 R_з = 54 \cdot 6370 = 343980 \text{ км}.$$

Задача 163.

Дано: *спутник Земли*; $h = 520$ *км*;
$g = 9,8$ *м/с*^{2}; $R = 6,37 \cdot 10^6$ *м*.

Определить T

Решение



Сила притяжения, действующее на тело массой m на поверхности Земли равна $F = mg$. Так как сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли r, то на спутник, находящийся на расстоянии r от центра Земли, действует сила притяжения

$$F = mg\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

где R – радиус Земли. Центростремительное ускорение спутника, которое сообщает ему сила притяжения, равно

$$a = \frac{F}{m} = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 = g\left(\frac{R}{h+R}\right)^2.$$

При движении по круговой орбите ускорение равно $a = v^2/r$. Получаем уравнение:

$$\frac{v^2}{r} = g\left(\frac{R}{r}\right)^2; \qquad v = \sqrt{\frac{g}{r}} \cdot R;$$

Период обращения спутника:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{R} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{2\pi(R+h)}{R} \cdot \sqrt{\frac{R+h}{g}};$$

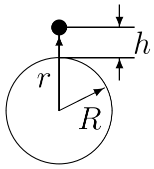
$$T = \frac{2 \cdot 3,14(6370+520) \cdot 10^3}{6370 \cdot 10^3} \cdot \sqrt{\frac{(6370+520) \cdot 10^3}{9,8}} = 5696 \text{ с} = 95 \text{ мин.}$$

Задача 164.

Дано: $h = 1000$ *км*; $g_0 = 9,81$ *м/с*^{2}.

Определить ω, v

Решение



На расстоянии $r = R + h$ от центра Земли (R – радиус Земли) ускорение свободного падения равно

$$g = g_0 \cdot \frac{R^2}{r^2} = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

где g_0 -ускорение свободного падения на поверхности Земли. Ускорение свободного падения равно нормальному ускорению спутника при движении по круговой орбите:

$$a_n = \omega^2 r = \omega^2 (R+h) = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

Отсюда получаем:

$$\omega^2 = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}; \qquad \omega = \frac{R}{(R+h)} \cdot \sqrt{\frac{g_0}{(R+h)}}$$

Линейная скорость спутника:

$$v = \omega r = \omega (R+h) = R \cdot \sqrt{\frac{g_0}{(R+h)}}$$

Вычисляем:

$$\omega = \frac{6370}{(6370+1000)} \cdot \sqrt{\frac{9,81}{(6370+1000)\cdot 10^3}} = 0,001 \ \textit{рад/с}$$

$$v = 6370 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{\frac{9,81}{(6370+1000)\cdot 10^3}} = 7345 \ \textit{м/с}.$$

Задача 165.

Дано: $A = 15$ *см* $= 0,15$ *м*; $\omega = 4\pi$ c^{-1};
$m = 20$ *гр* $= 0,02$ *кг*; $t = 0,2$ *с*.

Определить F

Решение

Уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x = A \sin(\omega t)$$

Скорость точки при колебаниях

$$v = \dot{x} = [A \sin(\omega t)]' = \omega A \cos(\omega t)$$

Ускорение точки

$$a = \dot{v} = [\omega A \cos(\omega t)]' = -\omega^2 A \sin(\omega t)$$

По второму закону Ньютона возвращающая сила равна

$$F = ma = -m\omega^2 A \sin(\omega t)$$

В момент времени $t = 0,2$ *с*:

$$F = -0,02 \cdot (4 \cdot 3,14)^2 \cdot 0,15 \sin(4\pi \cdot 0,2) = -0,29 \ \textit{Н}.$$

Полная энергия материальной точки

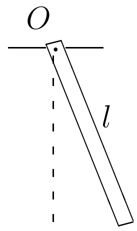
$$E = \frac{1}{2}\, m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,02 \cdot (4 \cdot 3,14)^2 \cdot (0,15)^2 = 0,0355 \ \textit{Дж}.$$

Задача 166.

Дано: *маятник*; $l = 30$ *см*.

Определить T

Решение



Приведённая длина физического маятника равна

$$L = \frac{J}{Ma}$$

где J – момент инерции маятника относительно точки подвеса, M – масса маятника, a – расстояние от точки подвеса до центра масс. Центр масс находится точно посередине стержня, поэтому $a = l/2$.

Момент инерции стержня относительно его конца равен $J = \frac{1}{3}ml^2$. Получаем

$$L = \frac{\frac{1}{3}\,ml^2}{m \cdot \frac{1}{2}\,l} = \frac{2}{3}\,l$$

Период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{g}} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{0,3}{9,8}} = 0,9 \text{ с}.$$

Задача 167.

Дано: $A = 15$ *см* $= 0,15$ *м*;
$v_{max} = 30$ *см/с* $= 0,3$ *м/с*.

Определить a_{max}

Решение

Уравнение гармонических колебаний материальной точки:

$$x = A\sin(\omega t)$$

Скорость точки при колебаниях:

$$v = \dot{x} = [A\sin(\omega t)]' = \omega A\cos(\omega t)$$

Максимальная скорость и круговая частота:

$$v_{max} = A\omega; \omega = \frac{v_{max}}{A} = \frac{0,2}{0,15} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Ускорение точки

$$a = \dot{v} = [\omega A\cos(\omega t)]' = -\omega^2 A\sin(\omega t)$$

Максимальное ускорение:

$$a_{max} = A\omega^2 = 0,15 \cdot 2^2 = 0,6 \text{ м/с}.$$

Уравнение колебаний:

$$x = 0,15\sin(2t)$$

Задача 168.

Дано: $x = A\sin\omega t$;

$A = 5$ *см* $= 0,05$ *м*; $\omega = 2$ *с*$^{-1}$;

$\varPi = 0,1$ *мДж*; $F = 5$ *мН*.

Определить t

Решение

Скорость и ускорение материальной точки при гармоническом колебании:

$$v = \frac{dx}{dt} = [A\sin\omega t]' = A\omega\cos\omega t; \qquad a = \frac{dv}{dt} = [A\omega\cos\omega t]' = -A\omega^2\sin\omega t.$$

Потенциальная энергия точки $\varPi = E_0 - T$, где E_0 – полная энергия, T – кинетическая энергия,

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\ \cos^2\omega t.$$

Полная энергия равна максимальному значению кинетической энергии:

$$E_0 = \frac{mA^2\omega^2}{2}; \qquad \varPi = \frac{mA^2\omega^2}{2}\left(1-\cos^2\omega t\right) = \frac{mA^2\omega^2}{2}\ \sin^2\omega t$$

По второму закону Ньютона

$$m = \frac{F}{a} = -\frac{F}{A\omega^2\sin\omega t};$$

$$\varPi = -\frac{F}{A\omega^2\sin\omega t}\cdot\frac{mA^2\omega^2}{2}\ \sin^2\omega t = -\frac{FA}{2}\ \sin\omega t;$$

$$\sin\omega t = -\frac{2\varPi}{FA} = -\frac{2\cdot 0,1\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-3}\cdot 0,05} = -0,8;$$

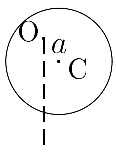
$$\omega t = 2\pi - 0,927 = 5,356\ \textit{рад}; \qquad t = \frac{5,356}{2} = 2,68\ \textit{с}.$$

Задача 169.

Дано: *маятник*; $d = 20$ *см*.

Определить ν

Решение



Приведённая длина физического маятника равна

$$L = \frac{J}{ma}$$

где J – момент инерции маятника относительно точки подвеса, m – масса маятника, a – расстояние от точки подвеса O до центра масс C, $a = R/2 = d/4$.

Момент инерции диска относительно его центра $J_c = \frac{1}{2}mR^2$. Момент инерции диска относительно точки подвеса O находим по теореме Штейнера:

$$J = J_c + ma^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}mR^2 = \frac{3}{16}md^2.$$

Получаем

$$L = \frac{\frac{3}{16}\ md^2}{m \cdot \frac{1}{4}\ d} = \frac{3}{4}\ d$$

Частота колебаний:

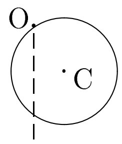
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{g}{d}} = \frac{1}{2\cdot 3,14}\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{9,8}{0,2}} = 1,29\ \textit{Гц}.$$

Задача 170.

Дано: *диск*; $R = 40$ *см*

Определить T

Решение



Период колебаний физического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

где приведённая длина физического маятника $L = J/ma$, J – момент инерции маятника относительно точки подвеса, m – масса маятника, a – расстояние от точки подвеса O до центра масс C, $a = R$.

Момент инерции диска относительно его центра $J_c = \frac{1}{2}mR^2$. Момент инерции диска относительно точки подвеса O находим по теореме Штейнера:

$$J = J_c + ma^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m\cdot R^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Получаем

$$L = \frac{3}{2}\ \frac{mR^2}{mR} = \frac{3R}{2}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}};$$

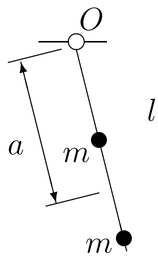
$$T = 2\cdot 3,14\sqrt{\frac{3\cdot 0,4}{2\cdot 9,81}} = 1,55\ \textit{с}.$$

Задача 171.

Дано: $m_1 = m_2 = m$; $l = 30$ *см*.

Определить L, T

Решение



Приведённая длина физического маятника равна

$$L = \frac{J}{Ma}$$

где J – момент инерции маятника относительно точки подвеса, $M = 2m$ – суммарная масса маятника, a – расстояние от точки подвеса до центра масс.
Центр масс находится точно посредине между грузиками, поэтому

$$a = \frac{3}{4}\ l$$

Момент инерции маятника:

$$J = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + ml^2 = \frac{5}{4}\ ml^2;$$

Приведённая длина маятника:

$$L = \frac{\frac{5}{4}\ ml^2}{2m \cdot \frac{3}{4}\ l} = \frac{5}{6}\ l = \frac{5}{6} \cdot 0,3 = 0,25\ \textit{м};$$

Период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{0,25}{9,8}} = 1\ \textit{с}.$$

Задача 172.

Дано: $m = 2\ \textit{гр} = 0,002\ \textit{кг};$
$A = 4\ \textit{см} = 0,04\ \textit{м}; \quad \nu = 5\ \textit{Гц}.$

Определить T_{max}

Решение

Уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x = A\sin(2\pi\nu t)$$

Скорость точки при колебаниях

$$v = \dot{x} = [A\sin(2\pi\nu t)]' = 2\pi\nu A\cos(2\pi\nu t)$$

Максимальная скорость точки

$$v_{max} = 2\pi\nu A$$

Максимальная кинетическая энергия точки

$$T_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{m(2\pi\nu A)^2}{2}$$

$$T_{max} = \frac{0,002 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 0,04)^2}{2} = 0,00157\ \textit{Дж}.$$